

1. 次の無限級数の収束を判定せよ .

$$(a) a > 0, \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+ak}{1+k} \right)^k$$

$$(b) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}$$

2. 正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ について

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r \begin{cases} < 1 & \implies \text{収束} \\ > 1 & \implies \text{発散} \end{cases}$$

を示せ .

3. 広義積分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ が収束すれば値を求めよ .

4. ガンマ関数 $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ ($s > 0$) は収束することを示せ .

5. 交代級数であるが、絶対収束しないで収束する例をひとつ挙げて、正しい例であることを説明せよ .

次の 2 問のうち、1 問を選択して答えよ . 2 問答えてはいけない .

6. $A \subset \mathbb{R}^2$ は開集合とする . $B = A^c$ (A の補集合) とおくと、 B は次を満たすことを示せ .

$$\forall \{x_n\} \subset B, x_n \rightarrow x_0 \implies x_0 \in B.$$

7. $z = e^{-\sin \frac{1}{2x+y}}$ の定義域、値域を求めよ . 定義域については x, y 平面に図示せよ .