

N は自然数全体を表す .

1. $a > 1, k \in N$ とするとき , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ を既知とする . 次の各問に答えよ .

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{a^x}$ の値を導け .

(b) $\lim_{x \rightarrow +0} x(\log x)^2$ は存在するか? 存在するならば理由を述べて値を導け .

(c) $f(x) = x^{x \log x}$ ($0 < x < 1$) の増減を調べて , $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ .
 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x), \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ を調べること .

2. $A = \{(-1)^{n+1} \frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in N\}$ の $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ の値を求めよ . ただし , 結果だけ答えるのではなく , 下記のそれぞれの定義に従って理由を明らかにすること .

$\sup A$ ($\inf A$) は A の上界 (下界) の最小元 (最大元) を表す .

$\max A$ ($\min A$) は A の最大元 (最小元) を表す .

3. $y = \arcsin x$ の導関数を逆関数の微分法に従って導け .

次の 3 問のうち 1 問を選択して答えよ . 2 問以上答えてはいけない .

4. $a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{2}$, $a_1 \geq 0$ で定まる数列 a_n を考える . 極限值が存在するための初項 a_1 の必要十分条件を求めよ . 理由を明らかにすること .

5. コーシー列は収束することを示せ . ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理 , 上極限 , 下極限ということばを含めること .

6. $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty$ のとき , $a_n b_n \rightarrow ab$ であることを $\varepsilon - N$ 法で導け .

解答すべき問題数は 4 である .