i は虚数単位を表す．複素数 z に対して $\overline{z}$ はその複素共役を表し，$\mathrm{Re}z$, $\mathrm{Im}z$ はそれぞれ実部，虚部を表す.

1. $f(z) = \overline{z} + i2z$ $(z = x + iy)$ に対して，積分路 C を次のように定める.

$$C_1 : z(t) = it,\ t : 0 \to 1;$$
$$C_2 : z(t) = t + i(1-t),\ t : 0 \to 1;$$
$$C = C_1 + C_2.$$

このとき，

(a) C を複素数平面に描け（向きも含めて）.

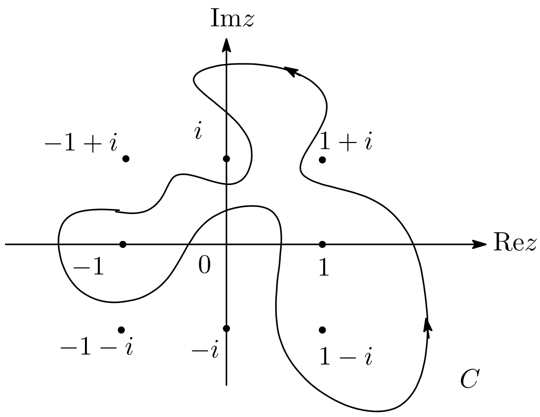
(b) 複素積分 $\int_C f(z)dz$ を計算せよ.

2. 複素数平面上の閉曲線 C は $|z - z_0| = r$ で与えられる中心 z_0 半径 r の円周で，$z_0 + r$ を始点に正の向きにとる（閉曲線なので終点も $z_0 + r$）．このとき，$\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$ を計算せよ．ただし $n \in \boldsymbol{N}$.

3. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)^3}$ を考える.

(a) 特異点をすべて求めて，そこにおける留数を計算せよ.

(b) 下図のような閉曲線 C を考えるとき，$\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ.



4. $\mathbb{R}^2$ の正の向きの単純閉曲線 C は下図で与えられる．このとき，次のグリーンの定理を証明せよ.

$$\int_C u(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial u}{\partial y} dxdy$$

ただし，左辺は C 上の線積分を表す．また，D は C で囲まれる部分の領域をを表す.