

1. $f(x)$ は $[a, b]$ で連続である．平均値の定理に基づいて次の各問に答えよ．
 - (a) $f(x)$ は (a, b) で微分可能とする．このとき， $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ ならば $f(x)$ は $[a, b]$ で狭義単調増加であることを示せ．
 - (b) $f(x)$ は (a, b) で 2 回微分可能とする．このとき， $f''(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ ならば $f(x)$ は $[a, b]$ で下に凸であることを示せ．ただし， $f(x)$ が下に凸であることの定義を明示して示すこと．
2. 次の各問に答えよ．
 - (a) 4 次方程式 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$ は少なくとも 2 つの解をもつことを示せ．
 - (b) n 次導関数 $(x \log(1 + 2x))^{(n)}$ を求めよ．
 - (c) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow 0$ を示せ．ただし， $f(x), g(x) \rightarrow 0, x \rightarrow 0$ のとき， $f(x) \sim g(x), x \rightarrow 0$ は同位の無限小を表す．
3. $f(x) = \sin 2x$ の $x_0 = \frac{\pi}{3}$ における 3 次のテイラーの定理をかき，2 次近似多項式を求めよ．さらに，その結果から x_0 における増減，凸性を答えよ．
4. $f(x) = e^x$ について
 - (a) 4 次のマクローリンの定理をかけ．
 - (b) (a) の結果から，剰余項を評価して $2.6 < e < 2.8$ を導け．