

1 累次積分 $\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{2-2y} x dx \right) dy$ の積分順序を交換して計算せよ.

2 変換 $\begin{cases} x = 1 - u \\ y = uv \end{cases}$ について次の各問に答えよ.

(1) ヤコビアン $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ を計算せよ.

(2) (u, v) 平面における $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ で定まる正方形 D について, この変換による D の (x, y) 平面における像を図示せよ.

3 下図の斜線部の領域を Ω とする. 各問に答えよ.

(1) Ω の面積を次の 3 つの方法でそれぞれ求めよ.

i) 小学校の算数の内容のみを用いる.

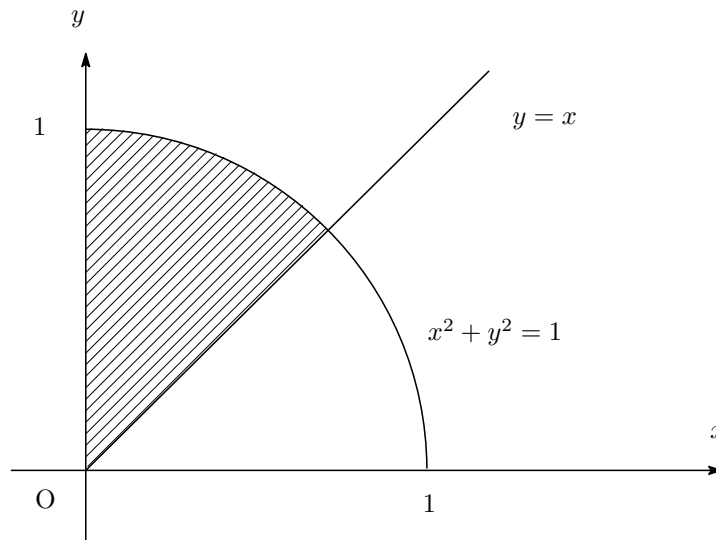
ii) 一変数関数 $f(x)$ の定積分として求める.

iii) 重積分 $\iint_{\Omega} 1 dx dy$ (これを $\iint_{\Omega} dx dy$ とかく) により求める.

(2) 密度 (単位面積あたりの量) という概念がある. 例えば人口密度など. 重積分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ は, 例えば場所 (x, y) 毎に決まる連続的な人口密度 $f(x, y)$ を与えたときの Ω における総人口数を表す. Ω を下図で与えたとき, 総人口数は

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}} dx dy$$

は有限であるだろうか? 有限ならば値を求めよ.



4 (x, y) 平面上に 3 点 $O(0, 0), A(1, 1), B(3, 2)$ を取る. 2 辺 OA, AB からなる平行四辺形 Ω について重積分 $\iint_{\Omega} \frac{1}{y - x + 2} dx dy$ を求めよ.