

$i$  は虚数単位を表す.  $\mathbb{C}$  は複素数全体,  $\mathbb{R}$  は実数全体を表す.  $z \in \mathbb{C}$  に対して  $\bar{z}$  は  $z$  の複素共役を表す.  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) に対して  $x = \operatorname{Re}z$ ,  $y = \operatorname{Im}z$  はそれぞれ  $z$  の実部, 虚部を表す.  $|z|$  は  $z$  の絶対値を表し,  $\arg z$  は  $z$  の偏角を表す.

1 関数  $f(z) = \frac{z^2 + (2-i)z - 2i}{z-i}$  は  $z \neq i$  において連続な関数である.  $f$  が  $\mathbb{C}$  で連続な関数になるように  $f(i)$  の値を定義せよ.

2 関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $u, v$  は  $C^1$  級) が正則であるためには,  $u, v$  がコーシー・リーマンの方程式をみたすことが必要であることを示せ.

3  $g(z) = u(x, y) + iC$  (ただし,  $C$  は実数) とする.  $g$  が正則であるための  $u$  の条件を求めよ.

4  $\log(-1 - \sqrt{3}i)$  の値を求めよ. ただし,  $\log z$  は  $-\pi < \arg(\log z) \leq \pi$  で主値を取るとする.

5  $w = \cos z$  について, つぎの各問に答えよ.

(1)  $\cos z = u(x, y) + iv(x, y)$  とおくとき,  $\cos z$  の定義から  $u, v$  を導け.

(2)  $z = x - 2i$  で  $x$  を  $-\frac{\pi}{2}$  から  $\frac{2\pi}{3}$  まで動かすとき,  $w$  の軌跡を (向きも含めて) 描け.

6 方程式  $\sin z = i$  を解け.