(注意)

- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

$\boxed{1}$ $f(x) = \log(1-3x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を予想して，数学的帰納法に基づき予想が正しいことを示せ.

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = (x^2-3)e^{-x}$ について，増減，凹凸，極値，変曲点の x 座標を調べ，また $x \to \pm\infty$ の様子を調べてグラフをかけ.

$\boxed{3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-2x-1}dx$ を計算せよ.

$\boxed{4}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arcsin x \, dx$ を計算せよ.

$\boxed{5}$ (1) ～ (3) を埋めよ.

コーシーの平均値の定理はロピタルの定理の証明に本質的に関わる．ロピタルの定理を導く過程を考える．ロルの定理を出発点とする．ロルの定理は $\boxed{\quad(1)\quad}$ と記述される．コーシーの平均値定理はつぎのように述べられる：$f(x), g(x)$ は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能とする．さらに $g(b) \neq g(a)$, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ とする．このとき，$\exists c \in (a,b)$ s.t.

$$(*) \qquad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

ロルの定理を用いてコーシーの平均値の定理を導こう．関数 $F(x)$ を次で定義する：

$$F(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) + f(a)\right).$$

すると，$\boxed{\quad(2)\quad}$ 以上で導けた．さて，次のロピタルの定理を導こう：$f(x), g(x)$ は x_0 の近傍で微分可能とする．また $f(x_0) = g(x_0) = 0$ で, $x \neq x_0$ に対して $g(x), g'(x) \neq 0$ を仮定するとき，もし $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

まず，コーシーの平均値の定理は $[a,b], (a,b)$ を $[b,a], (b,a)$ に置き換えても同じ結論 $(*)$ が成り立つことが容易にわかる．そこで，$x_0 < x$ (または $x < x_0$) に対して，$[x_0, x]$ (または $[x, x_0]$) においてコーシーの平均値の定理を適用して証明を書いていくと $\boxed{\quad(3)\quad}$ よって示せた.