(注意)

- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

i は虚数単位を表す．複素数 z に対して $\overline{z}$ はその複素共役を表す．また，閉曲線は正の向きに取る.

$\boxed{1}$ 複素積分は一般に，与えられる 2 つの経路の始点，終点がそれぞれ同じでも経路により値が変わる．$f(z) = z + i\,\overline{z}$, C_1 と C_2 はともに始点 0, 終点 $1+i$ の経路とする.

(1) $C_1 : z(t) = t + i\,t^2$, $t : 0 \to 1$ とする．$\int_{C_1} f(z)dz$ を計算せよ.

(2) C_1 と異なる経路 C_2 を取り，$\int_{C_2} f(z)dz$ を計算することで題意を説明せよ.

$\boxed{2}$ $f(z)$ の孤立特異点 z_0 に対して，留数 $\mathrm{Res}\,[f(z), z_0]$ を定義せよ．そのように定義可能であることを説明すること (つまり，解答した定義に従えば誰でも同じ値を定義することができるか？なぜできるのか？数学ではこれを well defined であるという).

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-i)^3(z+3i)}dz$ を計算せよ．ただし，$C : |z| = 2$ とする.

$\boxed{4}$ 実積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}d\theta$ を複素積分を用いて計算する.

(1) $C : z = e^{i\theta}$, $\theta : 0 \to 2\pi$ とする（つまり $C : |z| = 1$）．このとき,

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}d\theta$$

をみたす $f(z)$ を求めよ.

(2) 実積分の値を求めよ.