

1 $a_n = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow \infty$) であることを $\varepsilon - N$ 法で示せ.

2 空でない集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して, $\forall a \in A, a \leq b$ を満たすとき, b を A の上界という.

(1) A が上界をもつとき, b が A の上限 ($\sup A$) であるとは, b が A の上界であつて, \square (1) のときをいう.

(2) $A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ の $\sup A$ を求めよ. ただし, それが正しいことを前問の定義に従って説明すること.

3 $a_1 > 1, a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{2}, n = 1, 2, 3, \dots$ を満たす. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ があれば求めよ.

4 (1) ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理をかけ.

(2) $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$ について, 上極限 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ. ただし, 結果のみでなく, 理由も併せて述べること.

(3) コーシー列は収束列であることを説明せよ. ただし, コーシー列の定義を述べて, 有界数列, 上極限, 下極限の用語を含めること.

5 $f(x), g(x)$ は x_0 で連続であるとする. このとき, $f(x) + 2g(x)$ は x_0 で連続であることを示せ.

6 $a > 0$ とする. $f(x) = \frac{1}{x}$ は $a < x$ では一様連続であるが, $0 < x$ では一様連続でないことを示せ.