Positivity for nontrivial nonnegative solutions of an indefinite sublinear problem

日本数学会2017年度年会 函数方程式論分科会
2017/03/24

梅 津 健一郎（茨城大教育）

U. カウフマン（コルドバ国立大）

H. ラモス コアラン（サンティアゴ・デ・チレ大）

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, 滑らかな境界をもつ有界領域 $(N \geq 1)$,

$0 < q < 1$,

$$
(P_{a,q}) \quad \begin{cases} -\Delta u = a(x)\, u^q & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

- $a \in C(\overline{\Omega})$ は符号変化して, $\displaystyle\int_\Omega a < 0$.
- $\mathbf{n}$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル場.

目的： $I = (0,1)$ の部分集合

$\mathcal{A} := \{q \in (0,1) : (P_{a,q})$ の非自明解は正値解である$\}$

の解析を行うこと．ただし,

$(P_{a,q})$ の解 $u \not\equiv 0$ を非自明解といい,

解 $u > 0$ in $\overline{\Omega}$ を正値解という.

$\surd$ もし $q \geq 1$ ならば $(P_{a,q})$ は **slope condition** を満たし,

非自明解 $\Longrightarrow$ 正値解 ！

$\surd$ $0 < q < 1$ かつ a が符号変化する場合 ？

各 $q \in (0,1)$ に対して $(P_{a,q})$ は少なくとも $\mathbf{1}$ つの非自明解をもつ.

[2] C. Bandle, A. M. Pozio, A. Tesei, Existence and uniqueness of solutions of nonlinear Neumann problems, Math. Z. 199 (1988), 257–278.

例： $q \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$, $N = 1$, $\Omega := (-2, 2)$, $r := 2/(1-q) \geq 3$.

$$f(x) := \frac{(x+1)^r}{r}, \quad p(x) := \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

$$\alpha := -\frac{2^{r-2}(r+1)}{3}, \qquad \beta := 2^{r-3}(3r+1),$$

$$\gamma := -2^{r-1}(r-1), \qquad \delta := \frac{2^{r-3}}{3}\left(\frac{24}{r} + 5r - 13\right).$$

このとき,

$$C(\overline{\Omega}) \ni a(x) := \begin{cases} -(r-1)r^q & \text{if } x \in [0,1], \\ -\dfrac{p''(x)}{[p(x)]^q} & \text{if } x \in [1,2], \\ a(-x) & \text{if } x \in [-2,0], \end{cases}$$

$$u_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in [-2,-1], \\ f(x) & \text{if } x \in [-1,1], \\ p(x) & \text{if } x \in [1,2], \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $u_1 \in C^2(\overline{\Omega})$ は $(P_{a,q})$ の非自明解.

$$
(P_{a,1}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = a(x)u & \text{in } \Omega, \\ u \geq 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

このとき，もし，正値主固有値 $\lambda_1^+(a)$ が $\lambda_1^+(a) = 1$ を満たすとき，非自明解の全体は

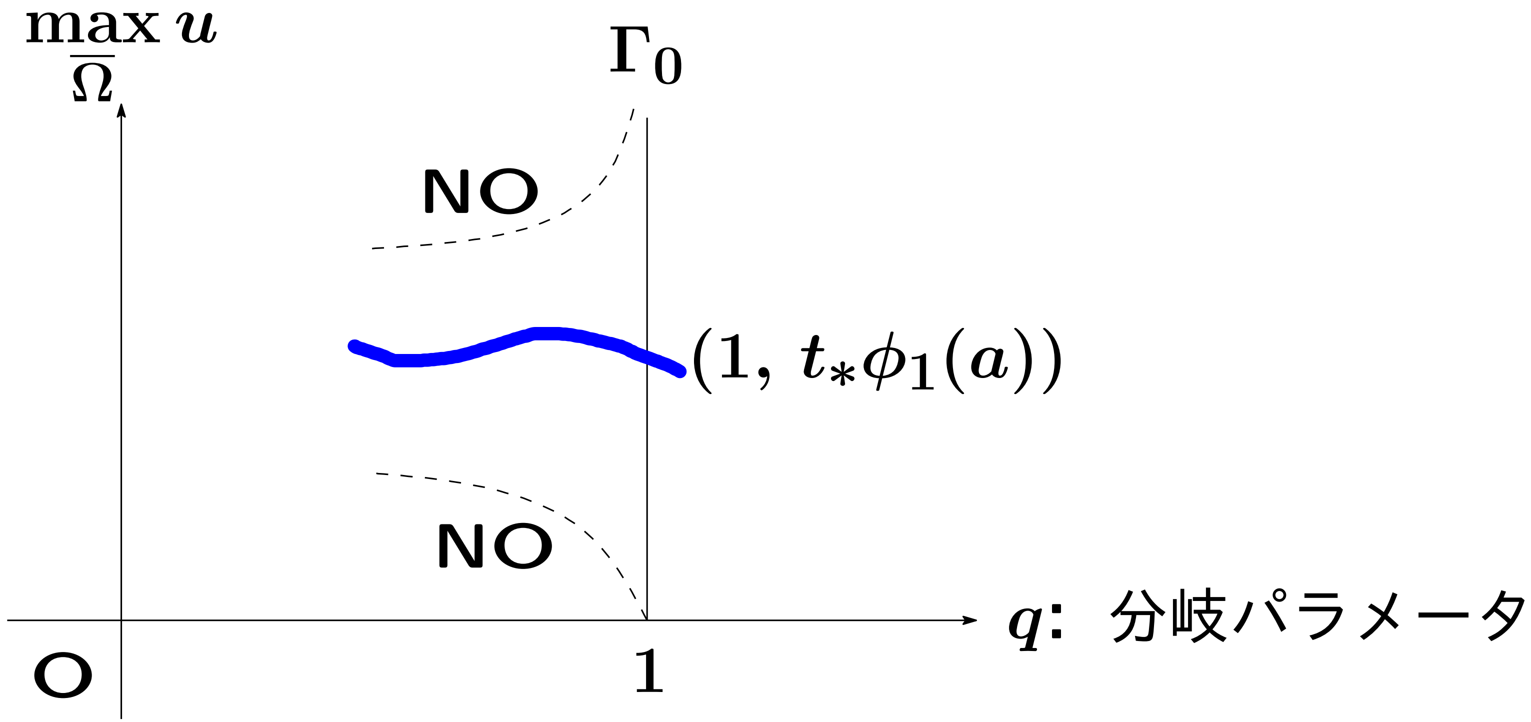
$$
\langle \phi_1(a) \rangle, \qquad ただし，\phi_1(a) > 0 \ \text{ in } \overline{\Omega}.
$$

√ $q \in (1-\varepsilon, 1) \implies$ 非自明解は正値解　？

√ $\lambda_1^+(a) = 1$ のとき，

$$
\Gamma_0 := \{(q, u) : q = 1,\ u = t\phi_1(a)\}
$$

は $(P_{a,q})$ の自明解の枝.



$\lambda_1^+(a) = 1$ の場合

√ 分岐点 t_* が存在する.

√ 分岐点 t_* は一意的である.

√ $(1 - \exists\varepsilon_0, 1)$ において他に非自明解は存在しない.

$t_* > 0$ が一意的であることについて.

$\mathcal{L} := -\Delta - a(x)$ を用いて,

$(P_{a,\,q})$

$\Updownarrow$

$$\mathcal{L}u = a(x)(u^q - u) \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \mathrm{n}} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega.$$

$\Phi(q,t)$

$$:= \int_\Omega a(x)\left\{(t\phi_1 + w(q,t))^q - (t\phi_1 + w(q,t)\right\}\phi_1 = 0.$$

$\ll$ 分岐方程式 $\gg$

$$\Phi_q(q,t)$$

$$= \int_\Omega a(x) \left[(t\phi_1 + w)^q \left\{ \log(t\phi_1 + w) + \frac{q\,\dfrac{\partial w}{\partial q}}{t\phi_1 + w} \right\} - \frac{\partial w}{\partial q} \right] \phi_1.$$

$w(1,t) \equiv 0$ より,

$$\Phi_q(1,t) = \int_\Omega a\,(x) \left[(t\phi_1) \left\{ \log(t\phi_1) + \cancel{\frac{\dfrac{\partial w}{\partial q}(1,t)}{t\phi_1}} \right\} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial q}(1,t)} \right] \phi_1$$

$$= t \int_\Omega a\,(x)\,\phi_1^2 \log(t\phi_1)$$

$$= t \left\{ (\log t) \int_\Omega a\,(x)\,\phi_1^2 + \int_\Omega a\,(x)\,\phi_1^2 \log\phi_1 \right\} = 0.$$

$$\Longrightarrow \quad t = t_* := \exp\left[-\frac{\int_\Omega a\,(x)\,\phi_1^2 \log\phi_1}{\int_\Omega a\,(x)\,\phi_1^2} \right].$$

$$\Longrightarrow \ \exists q_a \in [0,1) \quad \text{s.t.} \quad (q_a, 1) \subset \mathcal{A}.$$

主張. $\{x : a(x) > 0\}$ が有限個の部分領域からなるとき，$\mathcal{A}$ は 開 かつ 連結 である：

$$\exists q_a^* \in [0,1) \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{A} = \left(q_a^*,\ 1\right)$$

1. $q_0 \in \mathcal{A} \ \Longrightarrow \ \left(q_0,\ \frac{1}{2-q_0}\right) \subset \mathcal{A}$ を得る.

2. $\left(q_0,\ \frac{1}{2-q_0} - \exists \sigma_0\right] \subset \mathcal{A}, \quad \sigma_0 = \sigma_0(q_0).$
 $q_1 := \frac{1}{2-q_0} - \sigma_0.$

3. $\left(q_n,\ \frac{1}{2-q_n} - \sigma_n\right] \in \mathcal{A}.$ 結局, $\frac{1}{2-q_n} - \sigma_n \nearrow 1.$