

$[a, b]$ は有界閉区間を表す.

1 2 次関数 $f(x) = x^2$ ($0 \leq x$) は一様連続である. この命題の真偽を判定せよ. ε - δ 法に従って論じること.

2 $[a, b]$ で単調非増加な関数 ($x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$) は定積分可能であることを示せ.

3 $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ の $x_0 = 0$ における 2 次近似多項式 $g(x)$ を求めよ. また, この結果からわかる限りにおいて $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

4 次に与えられる $h(x)$ は $f(x)$ の $x_0 = 0$ における 3 次近似である. マクローリンの定理を使って, $-1 < x < 0$ に対して

$$f(x) = \log(1+x), \quad h(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

の大小関係を決定せよ.

5 $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$ はテイラー展開可能であることを示し, 級数展開せよ. 級数が収束する x の範囲を明示すること. $f^{(n)}(x)$ の結果は証明無しで用いてよい.

次の 4 問から 1 問のみ を選択して答えよ.

6 $[a, b]$ で連続な関数は有界であることを示せ.

7 $[a, b]$ で連続な関数は定積分可能であることを示せ. 一様連続性をもつことは既知とする.

8 2 次のテイラーの定理を (仮定も含めて正確に) 書いて, それを証明せよ.

9 ネイピア数 e について, $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ を導け.