

(注意)

- スマートフォン等, 端末は電源を切ってカバンにしまうこと.
- 解答はすべて解答用紙にかくこと.
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること.

1 $f(x) = x^2 \log x$ ($x > 0$) について, $y = f(x)$ のグラフをかけ. ただし, 次の性質を調べて, その結果を含めること.

- 増減, 凸性, 極値点, 変曲点
- $\lim_{x \rightarrow +0} f(x), \lim_{x \rightarrow +0} f'(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. 必要があればロピタルの定理を用いてよい.

2 不定積分 $\int \frac{1}{4 + 6e^{-x} + e^x} dx$ を求めよ. $t = e^x$ とおいて置換積分せよ.

3 次の議論にしたがって空欄を埋めよ. ただし, (1) は結果のみでよいが, (2),(3) は計算過程をかくこと.

不定積分 $\int \arcsin x dx$ は部分積分により求めることができる. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であるから, 部分積分の公式を用いると

$$\int \arcsin x dx = \int (x)' \arcsin x dx = \boxed{(1)}$$

と変形できる. 右辺を計算すると $\boxed{(2)}$ となる. この結果を使って $y = \arcsin x$ のグラフ, x 軸, 及び直線 $x = \frac{1}{2}$ で囲まれた図形の面積は次のように計算できる.

$$\boxed{(3)}$$

4 (1) $f(x) = \sin 2x$ について, n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を予想して (予想は理由なしにかいてよい), それが正しいことを数学的帰納法で示せ.

(2) $g(x) = x^2 \sin 2x$ の n 次導関数を求めよ.

5 平均値の定理を正確にかいて, ロルの定理を既知として証明せよ.