

(注意)

- 学生証を提示する.
- スマートフォン等電子機器は電源を切ってカバンにしまう.
- 答えは結果だけでなく途中の計算, 過程を記述する.

1  $\Omega = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq x\}$  のとき, 重積分  $\iint_{\Omega} x\sqrt{y} dx dy$  を求めよ.

2  $\Omega = \{(x, y) : y \geq x, y \geq -x, 3 \leq x^2 + y^2 \leq 5\}$  のとき, 重積分  $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$  を求めよ.

3  $\int_0^1 \left( \int_{-y}^y f(x, y) dx \right) dy$  の積分順序を交換せよ.

4 次の各問に答えよ.

(1)  $xy$  平面上の矩形  $[a, b] \times [c, d]$  において, 有界関数  $f(x, y)$  に対して重積分

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy$$

を定義する. まず, 分割  $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$  について,  $v_{\Delta}$  と  $V_{\Delta}$  を次で定義する.

$$v_{\Delta} = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \left( \inf_{(x,y) \in \Delta_{ij}} f(x, y) \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),$$

$$V_{\Delta} = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \left( \sup_{(x,y) \in \Delta_{ij}} f(x, y) \right) (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

ただし,  $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ . この議論を進めて重積分可能であることを定義せよ.

(2) 変数変換  $x = x(u, v), y = y(u, v)$  のヤコビアン  $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$  について,  $|J|$  の幾何的意味を説明せよ.

5  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  を導け.