

(注意)

- 学生証を提示する.
- スマートフォン等電子機器は電源を切ってカバンにしまう.
- 解答はすべて解答用紙に書く.
- 解答は結果だけでなく途中の計算, 過程を記述する.

\mathbb{N} は自然数全体を表す.

1 広義積分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ を計算せよ.

2 ガンマ関数 $\Gamma(s)$ ($s > 0$) を定義して, $n \in \mathbb{N}$ のとき, $\Gamma(n) = (n-1)!$ を数学的帰納法に従って証明せよ.

3 正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ について, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r > 1$ ならば ∞ に発散することを示せ.

4 次の正項級数の収束, 発散を判定せよ.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{k!}$,

(2) $\sum_{k=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k^2}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{1}{k}$

5 条件収束級数の定義をかいて, 具体例をひとつ挙げよ.

6 次の各問に答えよ.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2}$ は絶対収束することを示せ.

(2) 比較判定法を用いて, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}$ の収束, 発散を判定せよ.