(注意)

- 解答はすべて解答用紙にかくこと．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

$\boxed{1}$ $A = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合，閉集合，そのどちらでもない，のいずれであるか？ 理由を述べて決定せよ．

$\boxed{2}$ $f(x, y) = \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ について次の各問に答えよ．

(1) $(2, -1)$ における全微分を求めよ．また，接平面の方程式を定める法線ベクトルを 1 つ求めよ．

(2) $(x, y) = (0, 0)$ における値を定義して f の連続的拡張 $F(x, y)$ を求めよ．確かに連続的拡張になっていることを検証すること．

(3) F は $(0, 0)$ で全微分可能であるか，また C^1 級であるか，調べよ．両方を独立に調べること．

$\boxed{3}$ $z = f(x, y)$ と極形式 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の合成関数 $z(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考える．$r_0 = 2$, $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta_0 = \frac{1}{3}$ とする．このとき，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r}(r_0, \theta_0)$ を f の 2 次までの偏微分係数を用いて表せ．ただし，f は C^2 級とする．

$\boxed{4}$ $f(x, y) = xy + y^3$ について，点 $(1, 1)$ において，ベクトル $(-2, 3)$ で定まる方向の方向微分係数を求めよ．この方向に関数の値は増加しているといえるか？

ここからは選択問題である．**<u>1 題を選択して</u>** 解答せよ．

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^2$ の点列 $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)$ がコーシー列ならば収束することを示せ．$\mathbb{R}$ のコーシー列が収束することは用いてよい．

$\boxed{6}$ 集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ について次の 2 つの命題は同値であるが，特に (ii) ならば (i) を証明せよ．

(i) A は閉集合である．

(ii) $\mathbf{x}_n \in A$, $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ ならば $\mathbf{x}_0 \in A$

$\boxed{7}$ $f(x, y)$ について，C^1 級ならば全微分可能であることを示せ．

$\boxed{8}$ 2 変数関数 $f(x, y)$ と点 (x_0, y_0) に対して，$f(x_0, y_0) = c$ とおく．また，$\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ とする．このとき，$\nabla f(x_0, y_0)$ と等高線 $f(x, y) = c$ は (x_0, y_0) で直交し，さらに $\nabla f(x_0, y_0)$ は f が増加する方向に向いていることを説明せよ．