

1 $f(x, y) = x^5 - y^4 - 2xy^2 + 3x^2 - 5x - y + 1$ を考える.

- (1) 点 $(1, 1)$ における全微分を求めよ.
- (2) 1 次近似にしたがって $f(0.99, 1.02)$ の近似値を計算せよ.

2 $z = \log(x + y^2)$ の 2 次偏導関数をすべて求めよ.

3 $f(x, y) = y + x^2y$ を考える.

- (1) 等高線 $f = 0, f = 1, f = 2$ を xy 平面上に図示せよ.
- (2) $f = 2$ 上の点 $P(-1, 1)$ における勾配ベクトル $\nabla f(-1, 1)$ を求めよ. また, $\nabla f(-1, 1)$ は P における接線に直交することを示して, (1) の xy 平面上に P を始点にして図示せよ.
- (3) P において, ベクトル $(1, 2)$ で決まる方向の方向微分係数を求めよ.

以下, 選択問題である. 4 ~ 8 から 1 題選択して答えよ.

4 $f(x, y) = y\sqrt{|x|}$ を考える.

- (1) 点 $(0, 0)$ における連続性, 偏微分可能性を調べよ.
- (2) 点 $(0, 0)$ における全微分可能性を調べよ.

5 $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^4}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ は \mathbb{R}^2 全体への連続的拡張をもつか? もつならば連続的拡張を定義せよ (すべて理由を添えること).

6 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ は $(0, 0)$ で C^1 級であることを示せ.

7 a を定数とする. $z = f(x, y)$, $x = u \cos a - v \sin a$, $y = u \sin a + v \cos a$ の合成を考える. このとき, 次の等式を示せ.

$$(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_u)^2 + (z_v)^2$$

8 $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ について, $f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$ は存在するが, 等しくない (つまり順序交換できない) ことを示す.

- (1) $h, k \neq 0$ のとき, 直接の計算で $f_x(0, k), f_y(h, 0)$ を求めよ.
- (2) 題意を示せ.