(注意)

- 問題用紙 (B4), 解答用紙 (B4), 計算用紙 (A4) をそれぞれ 1 枚配付する.
- 学生証を提示すること.
- スマートフォンは電源を切ってかばん等にしまうこと.
- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい. 解きたい順に解答して構わない. ただし, 大問毎にそろえる.
- 解答は結果だけでなく, それに至る<u>過程を記述すること</u>.
- 試験終了時刻は 11:50.

$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ は必須, $\boxed{5}$ からは選択. 大問を 5 題解答せよ.

$\boxed{1}$ a, b を実数とする. 次の命題の<u>否定命題</u>について真偽を判定せよ. 真のときは $\exists$ にあたる変数を明示せよ. 偽のときは $\forall$ にあたる変数について反例を与えよ.

$$\forall a, \quad \exists x \quad \text{s.t.} \quad x^2 - 2ax + a \leq 0$$

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2-1} = 0$ を ε-N 法で検証せよ

(2) $f(x)$ が連続関数ならば $\displaystyle\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$ を示せ. ε-δ 法に従うこと.

$\boxed{3}$ 数列 $a_n = 2\cdot(-1)^{n-1} + \frac{1}{n},\ n \geq 1$ について次の各問に答えよ.

(1) 集合 $\{a_n\}$ の<u>上限</u>, <u>下限</u>, <u>最大元</u>, <u>最小元</u>を求めよ. それぞれ定義に従って厳密に論じよ.

(2) <u>上極限</u>, <u>下極限</u>を求めよ. それぞれ定義に従って厳密に論じよ.

$\boxed{4}$ 次の事柄を説明せよ（証明を求めているのではない）.

(a) 実数の連続性公理

(b) ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理

(c) コーシー列

$\boxed{5}$ ～ $\boxed{9}$ から<u>1 題選択して</u>解答せよ.

$\boxed{5}$ $0 \leq a_1 \leq \dfrac{1}{4}$, $a_{n+1} = a_n^2 + \dfrac{1}{4}$ で定まる a_n について，極限値があれば求めよ．

$\boxed{6}$ 数列 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$ について考える．

(1) a_n は収束する．実際，a_n は $\boxed{\quad (a) \quad}$, $\boxed{\quad (b) \quad}$ の 2 つの条件を満たす．よって，$\boxed{\quad (c) \quad}$ により a_n は収束する．(a), (b) に条件をかけ．(c) には a_n が収束する根拠を記せ．

(2) (a) または (b) のいずれかを導け．

$\boxed{7}$ a_n が有界な単調増加数列ならば $a_n \longrightarrow \sup_{n \geq 1}\{a_n\}$ であることを示せ．

$\boxed{8}$ フィボナッチ数列 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることを導け．収束の議論を厳密に行うこと．

$\boxed{9}$ $f(x), g(x)$ が x_0 で連続であるとき，積 $f(x)g(x)$ も x_0 で連続であることを示せ．ε-δ 法で証明せよ．証明に必要な事柄はすべて示すこと．