

(注意)

- 解答用紙には番号, 名前を忘れずに書く.
- 学生証を提示する.
- スマートフォン等電子機器は電源を切ってカバンにしまう.
- 答えは結果だけでなく途中の計算, 過程を記述する.
- 大問の順に解かなくてもよい. ただし, 大問毎にまとめる.
- 解答用紙は両面を使う.

合計大問 5 題を解答する.

1 $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$ のとき, 重積分 $\iint_{\Omega} \frac{y}{x^3} dx dy$ を考える.

- (1) y, x の順に累次積分して値を求めよ.
- (2) x, y の順に累次積分して値を求めよ.

2 C^1 級の座標変換 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ のヤコビアン $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ の絶対値は変換の間の微小な面積変化の割合を表す. 次の 1 次変換においてこの事実が正しいことを説明せよ.

$$x = au + bv, \quad y = cu + dv \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

3 4 本の直線 $y = 3x, y = x, y = 3x - 4, y = x + 2$ で囲まれた領域を Ω とする このとき, 重積分 $\iint_{\Omega} (x - y)^2 dx dy$ を計算して値を求めよ.

4 \mathbb{R}^2 の領域 Ω に対して, $\iint_{\Omega} dx dy$ (つまり $f(x, y) = 1$ の場合) は数値的には Ω の面積を表す. この考え方に従って次の領域 Ω の面積を求めよ.

$$\Omega = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x\}$$

次の大問 2 題のうち 1 題を選択して答えよ.

5 広義積分

$$\iint_{\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy$$

を計算して値を求めよ.

6 広義積分

$$\iint_{\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy$$

を計算して値を求めよ.