(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない．ただし，大問毎にそろえる．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

$\boxed{1}$ 次の命題の否定命題を答えて，否定命題の真偽を判定せよ．ただし，真の場合は ∃ にあたる変数を明示する．偽の場合は 反例を与える．x, y は 0 でない実数として，

$$\exists x \quad \text{s.t.} \quad \forall y, \quad xy \geq 1.$$

$\boxed{2}$ 数列に関する「はさみうちの原理」を ε-N 法で証明せよ：$\forall n \geq N, a_n \leq b_n \leq c_n$ とする．このとき，$a_n \to a$ かつ $c_n \to a$ ならば $b_n \to a$.

$\boxed{3}$ 連続関数 $f(x)$ について，$f(x_0) > 0$ ならば

$$\exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ \ f(x) > 0$$

であることを示せ．

$\boxed{4}$ 数列 a_n は漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n \geq 1)$, $0 < a_1 < 1$ を満たしている．まず，数学的帰納法により $\forall n, 0 < a_n < 2$ であることが示せる．この結果を既知として a_n の極限値が存在することを示し，その値を求めよ．

$\boxed{5}$ 数列 $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{2n}$, $n \geq 1$ について，次の値をそれぞれ求めよ．ただし，それぞれの定義にしたがって結果に至る過程を答えよ．

(1) 集合 $\{a_n\}$ について，上限，下限，最大元，最小元

(2) 上極限，下極限

$\boxed{6}$ ～ $\boxed{10}$ から1題選択して解答せよ．

$\boxed{6}$ $a_n \to a$ とする．$b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ とおくとき，$b_n \to a$ を示せ．

$\boxed{7}$ a_n が下に有界な単調減少数列ならば収束することを示せ．

$\boxed{8}$ フィボナッチ数列 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ について，$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ で b_n を定めるとき，b_n はコーシー列であることを示せ．

$\boxed{9}$ $f(x), g(x)$ が x_0 で連続であるとき，積 $f(x)g(x)$ も x_0 で連続であることを示せ．ε-δ 法で証明せよ．証明に必要な事柄はすべて示すこと．

$\boxed{10}$ ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理を証明せよ：有界な数列は収束する部分列をもつ．