(注意)

- 大問は順に解かなくてもよい．ただし，大問毎にまとめること．
- 答えは結果だけでなく途中の計算，過程を記述する．
- 解答用紙は両面使用する．

$\boxed{1}$ 2 次のテイラーの定理を正確に書いて（仮定及び結論），証明せよ．

$\boxed{2}$ 次の関数の中で一様連続なものを1 つ選び,一様連続であることを ε-δ 法に従って証明せよ．証明の中で，何が一様であるかをはっきりと述べること．

- $f(x) = x^2 \quad (x \geq 2)$
- $f(x) = x^2 \quad (0 \leq x < 2)$
- $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 2)$
- $f(x) = \frac{1}{x} \quad (0 < x \leq 2)$
- $f(x) = \sin x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$
- $f(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$

$\boxed{3}$ $[a, b]$ 上有界な関数 $f(x)$ について，分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ に対して $\overline{S}_\Delta, \underline{S}_\Delta$ を次で定める．

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}),$$
$$\underline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}).$$

(1) $n = 3$ のとき，$\overline{S}_\Delta, \underline{S}_\Delta$ がどのような量を表すかを図を用いて説明せよ．

(2) $f(x)$ が単調増加ならば $[a, b]$ 上定積分可能であることを ε-δ 法に従って示せ．

$\boxed{4}$ $f(x) = \sqrt{2 - x}$ について次の各問に答えよ．

(1) $x = 1$ における 2 次近似多項式 $g(x)$ を求めよ．また，$g(x)$ を用いて $x = 1$ の近傍における $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．$g(x)$ が近似多項式として意味があるのにどのような条件が必要であるかを考慮に入れて概形をかくこと．

(2) $0 < x < 2$ における $f(x)$ と $g(x)$ の大小関係をテイラーの定理を用いて調べよ．

$\boxed{5}$ $f(x) = \cos x$ は収束半径 ∞ のマクローリン級数展開可能であることを示し，級数展開の式を与えよ．