大問 6 題解答する．

$\mathbb{R}^2$ はユークリッドの距離をもつ 2 次元ユークリッド空間である．

$\boxed{1}$ 定義にしたがって広義積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}}\,dx$ を計算せよ．

$\boxed{2}$ ガンマ関数 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ $(s > 0)$ を考える．自然数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ であることを数学的帰納法により示せ．特に極限操作の議論はていねいに行うこと．

$\boxed{3}$ $\displaystyle\sum_{k=4}^{\infty}\left(1-\frac{3}{k}\right)^{k^2}$ の収束，発散を判定せよ．

$\boxed{4}$ $a > 0, p > 0$ とする．$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{a^k}{k^p}$ が絶対収束級数であるための a, p の条件を求めよ．

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^2$ における ε 近傍 $U_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ は開集合であることを示せ．開集合の定義にしたがって厳密に示すこと．

以下選択問題．1 題選択して解答せよ．

$\boxed{6}$ 正項級数 $\sum_k a_k$ について，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = r < 1$ ならば収束することを証明せよ．

$\boxed{7}$ $p > 0$ とする．$\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\log k)^p}$ の収束，発散を判定せよ．

$\boxed{8}$ ライプニッツの交代級数の定義を書いて，それが常に収束することを示せ．

$\boxed{9}$ (1) K を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする．K が閉集合であるためには次の命題が成り立つことが必要十分であることを示せ．

$$\{\boldsymbol{x_n}\} \subset K,\ \boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}_0 \text{ ならば } \boldsymbol{x}_0 \in K$$

(2) 集合 $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, 3, \dots\right\}$ が閉集合であるか否かを判定せよ．