(注意)

- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$ の定義域と値域を求めよ．定義域については xy 平面に図示せよ.

(2) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ の $\mathbb{R}^2$ への連続的拡張があれば求めよ．無ければ「存在しない」と答えよ.

(3) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ の偏微分係数 $f_y(0, 0)$ を定義に従って求めよ.

(4) 関数 $z = f(x, y)$ は $f(3, -4) = 3$ を満たす．$(x, y) = (3, -4)$ において全微分

$$dz = dx - 5dy$$

をもつとき，グラフ上の点 $(3, -4, f(3, -4))$ における接平面の方程式を求めよ.

(5) $f(x, y) = y^2 e^{-2x}$ の 3 次までの偏導関数を**すべて**求めよ.

$\boxed{2}$ 連続関数 $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ について次の各問に答えよ.

(1) f は $(0, 0)$ で全微分可能であるかを定義に従って調べよ．また，全微分可能ならば接平面の方程式を求めよ.

(2) 偏導関数 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ を求めて，f が $(0, 0)$ で C^1 級であるかを調べよ.

$\boxed{3}$ $f(x, y)$ は C^2 級とする．合成関数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について，2 次偏導関数 $z_{\theta\theta}$ を f, r, θ で表せ.

$\boxed{4}$ $f(x, y) = xy^2$ を考える.

(1) 点 $\mathrm{P}(1, -1)$ におけるベクトル $(3, 5)$ で定まる方向の方向微分係数 $f_{\boldsymbol{u}}(1, -1)$ を求めよ．また，求めた $f_{\boldsymbol{u}}(1, -1)$ の値は f のグラフのどのような情報を与えているか.

(2) P を通る f の等高線を，P の近傍において線分で近似して xy 平面に図示せよ.