(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない．ただし，大問毎にそろえる．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

$\boxed{1}$ 次の事柄を説明せよ．

(1) 上限，下限と実数の連続性公理

(2) ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理と上極限，下極限

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-4}{n+1}=1$ を ε-N 法で確認する．$\varepsilon=10^{-2}$ のとき，N をひとつ明示せよ．

$\boxed{3}$ $f(x)$, $g(x)$ が $x=x_0$ で連続のとき，$f(x)+g(x)$ は $x=x_0$ で連続であることを示せ．ε-δ 法に従うこと．

$\boxed{4}$ 漸化式 $a_{n+1}=a_n^2-2a_n+2$ $(n\geq 1)$, $a_1=\frac{3}{2}$ を満たす a_n について次の各問に答えよ．

(1) $\forall n,\ 1<a_n<2$ を数学的帰納法で示せ（a_n-1, a_n-2 の符号を考える）．

(2) 極限値があれば求めよ．

$\boxed{5}$ 有界であるが，収束しない 数列 a_n を考える．

(1) 上極限と上限が一致しない a_n の例をひとつ挙げよ．

(2) (1) で挙げた a_n の下極限，下限を求めよ．

ただし，上限，下限は集合 $\{a_n\}$ について考える．

$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{9}$ から**1 題選択して**解答せよ．

$\boxed{6}$ $a_n \to a$ とする．$b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ とおくとき，$b_n \to a$ を示せ.

$\boxed{7}$ 上に有界な単調増加数列 a_n は収束することを示せ.

$\boxed{8}$ フィボナッチ数列 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ について，$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ で b_n を定めるとき，b_n は縮小性を持つことを示せ.

$\boxed{9}$ 実数 x について，$\exists q_n \in \mathbb{Q}$ s.t. $q_n \leq q_{n+1}$，$q_n \to x$ が導ける．この結果を用いて，実数の連続性公理に従い，a^x $(a > 1)$ を定義せよ（そのように論じることができる理由も述べながら定義すること）．有理数 q に対する a^q の定義および性質は既習とする.