

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと .
- 番号順に解かなくてもよい . 解きたい順に解答して構わない .
- 解答は結果だけでなく , それに至る過程を記述すること .

1. つぎの各問に答えよ .

(1) 級数  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$  の収束を判定せよ .

(2)  $\mathbb{R}^2$  の集合  $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}$  は開集合 , 閉集合 , そのどちらでもない , のどれであるか ? 理由を述べて答えよ .

2. つぎの関数の  $(0, 0)$  における全微分可能性を調べよ . また , 可能ならば  $(0, 0, f(0, 0))$  における接平面

の方程式を求めよ .  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. 方向微分係数についてつぎの問に答えよ .

(1)  $f(x, y)$  が  $(x_0, y_0)$  で全微分可能であるならば ,  $f$  の  $(x_0, y_0)$  における方向  $\mathbf{u} = (\alpha, \beta)$ ,  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , への方向微分係数  $f'_{\mathbf{u}}(x_0, y_0)$  は  $f'_{\mathbf{u}}(x_0, y_0) = \alpha f_x(x_0, y_0) + \beta f_y(x_0, y_0)$  で与えられることを示せ .

(2)  $f(x, y) = (2x - 3y + 1)e^{-4x + y^2}$  について (1) に従って , 点  $(1, -1)$  におけるベクトル  $(-2, 3)$  の方向への方向微分係数  $f'_{\mathbf{u}}(1, -1)$  を求めよ .

4.  $z = f(x, y)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  により , 合成関数  $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  を考えるとき , つぎの等

式を導け .  $z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta}$