

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと。
- 番号順に解かなくてもよい。解きたい順に解答して構わない。
- 解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。

1. \mathbb{R}^2 の集合 $A = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\}$ は開集合, 閉集合, そのどちらでもない, のどれか? 理由を述べて答えよ。
2. 関数 $z = \log(x^2 + y^2)$ の定義域と値域を求めよ。
3. 関数 $g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^4}$ は点 $(1, -1)$ において全微分可能であることを示し, $(1, -1, g(1, -1))$ における接平面の方程式を求めよ。
4. 関数 $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ ($x \neq 0$) の 3 次偏導関数 (8 種類) をすべて求めよ。
5. $f(x, y) = 3x^3 - y^2 + xy - 1$ の点 $(1, 1)$ における方向微分係数 $f'_u(1, 1)$ が 0 となる方向 $\mathbf{u} = (\alpha, \beta)$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, をひとつ求めよ。
6. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ は $(0, 0)$ において全微分可能であるか? 判定せよ。また, $(0, 0)$ において C^1 級であるか? 判定せよ。
7. 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^k}$ の収束を判定せよ。