(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない．
- 解答は結果だけでなく，それに至る<u>過程を記述すること</u>．

1. つぎの級数の収束を判定せよ．ただし，理由を述べること．

   (1) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)^{k^4}$

   (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sin k$

   (3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k\log k}$

   (4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k!)^2}$

2. 級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^p}$ $(p>0)$ が絶対収束するための p の条件を求めよ．

3. つぎの $\mathbb{R}^2$ の集合は開集合，閉集合，そのどちらでもない，のどれであるか．理由を述べて判定せよ．

   (1) $A_1=\{(x,y): y\geq x^2\}$

   (2) $A_2=\{(x,y): 0<x<\frac{\pi}{2},\ y=\sin x\}$

4. B_1, B_2 は $\mathbb{R}^2$ の開集合である．このとき，$B=B_1\cap B_2$ (B_1 と B_2 の共通部分) も開集合であることを示せ．

5. A が閉集合ならば次の主張が成り立つ：$\mathbf{x}_n\in A$ かつ $\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}_0$ ならば $\mathbf{x}_0\in A$. さて，逆の命題を証明せよ．ただし，A が閉集合とは A^c (A の補集合) が開集合のときをいう．

6. つぎの 2 問のうち 1 つを選んで解答せよ．

   (i) $\mathbb{R}^2$ の点列 $\mathbf{x}_n$ が点 $\mathbf{x}_0$ に収束することを，$\mathbf{x}_0$ の ε 近傍 $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ を用いて説明せよ．

   (ii) $\mathbb{R}^2$ の点列 $\mathbf{x}_n=(x_n,y_n)$ はコーシー列である．このとき，$\mathbf{x}_n$ は収束することを示せ．

7. $z=\dfrac{1}{\log(y+x^2)}$ の定義域と値域を求め，定義域は $x-y$ 平面に図示せよ．ただし，ここでいう定義域とは，与えられた関数の形から最大に動くことのできる (x,y) の範囲をいう．

8. つぎの極限値があれば求めよ．

   (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$

   (2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^6+y^2}$