(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい. 解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること.

1. $f(x, y) = (2x + y)e^{-x}$ について,

   (1) $(x_0, y_0) = (0, 0)$ における 2 次近似方程式を求めよ.

   (2) $(0, 0)$ の近傍における $z = f(x, y)$ のグラフの形状を述べよ.

2. 体積が 1 の直方体の中で, 表面積が最小のものを決定せよ.

3. $F(x, y) = x^2 - y^3 + xy - x$ について,

   (1) F の零点集合 $F(x, y) = 0$ は $(x_0, y_0) = (1, 1)$ の近傍で $y = f(x)$ と表せることを示せ.

   (2) $f'(1), f''(1)$ の値を求めることによって, $(1, 1)$ の近傍における F の零点集合の概形をかけ.

4. $4x^2 + y^2 = 4$ の制限のもとで, $f(x, y) = x + y$ の極値を求めよ.

[解答]

1. $f_x = e^{-x}(2-2x-y)$, $f_y = e^{-x}$, $f_{xx} = e^{-x}(-4+2x+y)$, $f_{xy} = -e^{-x}$, $f_{yy} = 0$. これより次の 2 次近似を得る.

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}(f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2) \\ &= 2x + y - 2\{(x+\frac{y}{4})^2 - \frac{y^2}{16}\}. \end{aligned}$$

２次近似より，$(0,0)$ において $f(x,y)$ のグラフは接平面 $z = 2x+y$ の上下に現れる.

2. 演習問題の解答を参照.

3. (1) $F_y(x,y) = -3y^2 + x$, $F_y(1,1) = -2 \neq 0$ だから，陰関数定理により題意を得る.

(2) (1) より $F(x,y) = 0$ は $(1,1)$ の近傍で $y = f(x)$ と表される．f は $1 = f(1)$ をみたす. $F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0.$$

さらに x で微分すると

$$F_{xx}(x,f(x)) + F_{xy}(x,f(x))f'(x) + \{F_{yx}(x,f(x)) + F_{yy}(x,f(x))f'(x)\}f'(x) + F_y(x,f(x))f''(x) = 0$$

$$\therefore\ F_{xx}(x,f(x)) + 2F_{xy}(x,f(x))f'(x) + F_{yy}(x,f(x))f'(x)^2 + F_y(x,f(x))f''(x) = 0.$$