

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと。
- 番号順に解かなくてもよい。解きたい順に解答して構わない。
- 解答は結果だけでなく、それに至る過程を記述すること。

 \mathbb{N} は自然数全体を表す。

1. つぎの集合の上限, 下限, 集積点を求めよ (結果のみで良い)。

- (1) $A = \left\{ (-1)^n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
- (2) $B = \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N} \}$
- (3) $C = \{ \arctan(n-2) : n \in \mathbb{N} \}$

2. つぎの間に答えよ。

- (1) 実数の連続性公理とは何か? 述べよ。
- (2) (1) に基づいて次の命題を示せ。「上に有界な単調増加列 a_n は常に収束する」

3. 数列 a_n は $a_1 > 1$, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) をみたす。

- (1) a_n は単調減少列であることを示せ。
- (2) a_n は収束することを示し, 極限値を求めよ。

4. $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) を考える。

- (1) $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |a_{n+1} - a_n|$ ($n \in \mathbb{N}$) をみたすことを示せ。
- (2) a_n は収束することを示し, 極限値を求めよ。

5. つぎの関数が $x = 0$ で連続的拡張をもつならば定義せよ。もたなければ「もたない」と答えよ。

- (1) $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$
- (2) $\frac{|x|}{x}$

6. $e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ を既知として, つぎのステップを経て $\log x$ の導関数を導け。

- 極限值 $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ を求める。