(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

1. 集合 $A = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in \boldsymbol{N} \right\}$ を考える．
(1) A の上限 $\sup A$，下限 $\inf A$ を求めよ．
(2) (1) で求めた $\sup A$ と $\inf A$ が正しいことをそれぞれ定義にしたがって説明せよ．「$\alpha = \sup A$ ($\inf A$) $\iff$ α は A の上界 (下界) の最小元 (最大元)」

2. 数列 $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{1}{10}$ を考える．
(1) $a_n \leq \frac{1}{2}$ $(n \geq 1)$ を数学的帰納法で示せ．
(2) a_n は収束することを示し，極限値を求めよ．
(3) $a_1 = 2$ のとき，a_n の収束に関してどう予想できるか？予想した結果を証明せよ．

3. 関数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ |x|, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ について考える．
(1) 右連続，左連続，連続をみたす x を求めよ．
(2) もし連続でない点があれば，その点が連続でないことを，次の連続性の定義に従って説明せよ．$f(x)$ が $x = x_0$ で連続とは，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

4. $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を既知とするとき，e を底とする対数関数 $\log x$ の導関数を導け．

解析学の基礎 I　期末試験解答 2010.8.4

1. (1) $\sup A = 1$, $\inf A = -1$.

(2) $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq 1$ $(m = 1)$. よって，1 は上界．$m = 1$ を考えると，$1 - \frac{1}{n} \to 0$ であるから，どんな $b < 1$ も $b < 1 - \frac{1}{n}$ をみたす n が存在する．だから b は上界ではない．よって 1 が上界の最小元である．$\inf A = -1$ も同様.

2. (1) $a_1 = \frac{1}{10}$ と漸化式から $a_n > 0$ $(n \geq 1)$ は明らか．$a_1 = \frac{1}{10} \leq \frac{1}{2}$ は成立．$a_n \leq \frac{1}{2}$ が成立と仮定．すると，$0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ だから $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. よって $n+1$ も成立.

(2) $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + \frac{1}{4} - a_n = (a_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0$. よって a_n は単調増加列であるから，実数の連続性により $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．漸化式の両辺を $n \to \infty$ とするとき，$a = a^2 + \frac{1}{4}$. これを解いて $a = \frac{1}{2}$.

(3) ∞ に発散と予想．実際，$a_{n+1} - a_n = a_n^2 + \frac{1}{4} - a_n = (a_n - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ より，やはり a_n は単調増加．よって $a_1 = 2$ より $a_n \geq 2$. これより，$(a_n - \frac{1}{2})^2 \geq (2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2$. したがって，$a_{n+1} - a_n > 2$. これを解くと，$n \geq 2$ ならば $a_n > a_1 + 2(n-1) = 2n$. はさみうちより $n \to \infty$ のとき，$a_n \to \infty$ を得る.

別証明（答案より）：$a_n \geq 2^n$ $(n \geq 1)$ であることを帰納法で示す．$n = 1$ のとき成立．n で成立と仮定すると，$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} > a_n^2 \geq (2^n)^2 = 2^{2n} \geq 2^{n+1}$. よって $n+1$ のときも成立．示せた．はさみうちにより $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. （上の証明より良い．なぜなら a_n は n について指数的に増加することがわかるから）

3. (1) 任意の実数 x で右連続．$x \neq -1$ で左連続．$x \neq -1$ で連続.

(2) $x = -1$ で連続でない．$\varepsilon = \frac{1}{2}$ を考えると，定義の中で与えられる δ を取ることができない．つまり，もし δ が存在すると仮定すると，-1 の左側の x について矛盾が生じる.

4. 授業のノートを参照