以下，n, N は自然数を表す．

1. 次の各問に答えよ．

(a) $\cos^{-1}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}\right)$ を求めよ．

(b) $y = \dfrac{2-5x}{4x+3}$ のグラフをかけ．

(c) $y = -1 + \sin(\pi - 2x)$ のグラフをかけ．

(d) 微分公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \geq 1)$ を微分の積公式と数学的帰納法により導け．

2. $a > 1$ とする．二項定理を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n} = 0$ を導け．

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を $\varepsilon - N$ 法「$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N$ s.t. $\forall n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$」で定義する．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n+2} = 1$ を検証する．$a_n = \dfrac{n+4}{n+2}$ とおく．$\varepsilon = \dfrac{1}{10^3}$ としたとき，N を一つ具体的に与えよ．

(b) $a_n \to \alpha, b_n \to 0$ $(n \to \infty)$ のとき，$a_n + (-1)^n b_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ を $\varepsilon - N$ 法により示せ．

4. 上限下限について以下の問に答えよ．

(a) 集合 $A = \left\{\dfrac{1}{n} : n \geq 1\right\}$ の下限が 0 であることを定義に従って説明せよ．

(b) $B = \{\tan^{-1} n :\ n \geq 1\}$ の上限と下限を求めよ．ただし，$\tan^{-1} x$ は逆三角関数．

5. 有界な数列 a_n を考える．

(a) $A_N = \displaystyle\sup_{n\geq N} a_n$ で与えられる数列 A_N $(N \geq 1)$ は収束することを示せ．

(b) (a) により，上極限 $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N\to\infty} A_N$ を定義するとき，$a_n = (-1)^n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ について A_N と $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ を求めよ．

6. 次の各問に答えよ．

(a) $0 < \exists c < 1$ s.t. $|a_{n+1} - a_n| \leq c\,|a_n - a_{n-1}|$ $(n \geq 2)$ をみたすとき，a_n はコーシー列であることを示せ．

(b) $a_1 > 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ をみたす数列 a_n は収束することを (a) を利用して示せ．また，その極限値を求めよ．

K.U.

以下において，$\varepsilon-\delta$ 法を用いて論ぜよ，という指示がない場合はこれに触れる必要はない．

1. つぎの関数の一様連続性を $\varepsilon-\delta$ 法に基づいて判定せよ．

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad (x>1)$$

2. 実数 $a \in \mathbf{R}$ は $a>1$ をみたす．有理数 $q \in \mathbf{Q}$ に対する a^q の性質は既知とする．つぎの問に答えよ．

   (a) 無理数 r に対して a^r を定義せよ．

   (b) $r_1, r_1 \in \mathbf{R}$ について，単調性「$r_1 < r_2$ ならば $a^{r_1} < a^{r_2}$」 を導け．

3. 5 次方程式 $x^5-6x^3+x^2-x+4=0$ は区間 $(2,3)$ に解をもつことを示せ．

4. 実数 x に対して，$[x]$ を x を超えない最大の整数と定義する．例えば,

$$\left[\ \frac{3}{4}\ \right]=0, \quad [\ -6.6\ ]=-7, \quad [\ 4\ ]=4.$$

   (a) 左極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 100-0}[x]$ が存在するならば求めよ．

   (b) 関数 $f(x)=[x]$ は $x=5$ で連続であるか否かを，連続性の定義に基づいて判定せよ．

5. 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ が存在するならば求めよ．

K.U.

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

1. $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ の値を求めよ.

2. $y = x^2 - 2x + 3 \ \ (x \leq 1)$ の逆関数があれば求めてグラフをかけ．無ければ「存在しない」と答えよ.

3. 二項定理から $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$ を導け．さらに，$\varepsilon = \frac{1}{10}$ として $\varepsilon - N$ 法で検証せよ.

4. つぎの関数のグラフの概形をかけ.
   (1) $y = \dfrac{2x-1}{4x+3}$
   (2) $y = -2 + \log_{\frac{1}{2}}(1-4x)$

5. 指数が整数のときの指数法則を仮定する．自然数 m, n について $(a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$ を導け.

6. (1) f, g は微分可能とする．微分の積公式 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ を導け.
   (2) $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ を数学的帰納法により示せ.

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい. 解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること.

$\mathbb{N}$ は自然数全体を表す.

1. つぎの集合の上限, 下限, 集積点を求めよ（結果のみで良い）.
   (1) $A = \left\{ (-1)^n - \dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$
   (2) $B = \{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \}$
   (3) $C = \{ \arctan(n-2) \ : \ n \in \mathbb{N} \}$

2. つぎの問に答えよ.
   (1) 実数の連続性公理とは何か？述べよ.
   (2) (1) に基づいて次の命題を示せ.「上に有界な単調増加列 a_n は常に収束する」

3. 数列 a_n は $a_1 > 1$, $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ をみたす.
   (1) a_n は単調減少列であることを示せ.
   (2) a_n は収束することを示し, 極限値を求めよ.

4. $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ を考える.
   (1) $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |a_{n+1} - a_n|$ $(n \in \mathbb{N})$ をみたすことを示せ.
   (2) a_n は収束することを示し, 極限値を求めよ.

5. つぎの関数が $x = 0$ で連続的拡張をもつならば定義せよ. もたなければ「もたない」と答えよ.
   (1) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$
   (2) $\dfrac{|x|}{x}$

6. $e = \displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ を既知として, つぎのステップを経て $\log x$ の導関数を導け.
   - 極限値 $\displaystyle\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ を求める.

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

1. 導関数の公式 $(\cos x)' = -\sin x$ を定義より導け．$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ は用いてよい.
2. $\displaystyle y = -5x^3 - 1 + \frac{2}{x^2}$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ.
3. 関数 $y = x^2 - 4x - 10$ $(-2 \leq x \leq 0)$ の値域を求めよ．さらに，逆関数があれば，定義域を明記して求め，そのグラフをかけ.
4. 関数 $\displaystyle y = \frac{1}{1 + \sin^2(\tan x)}$ の導関数を求めよ．$\sin^2(\tan x)$ は $(\sin(\tan x))^2$ を意味する.
5. 関数 $\displaystyle y = -\frac{\pi}{2} - 3\arcsin(2x + 1)$ のグラフをかけ.
6. 有理数の指数に対する指数関数の定義，指数が自然数のときの指数法則，さらに自然数 m, n に対して $(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ を既知とする．正の有理数 q_1, q_2 に対して，$a^{q_1}a^{q_2} = a^{q_1+q_2}$ を導け.
7. 等式 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ を考える．$x = \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2}$ とおいて $x = \arctan\frac{1}{3}$ を導け.

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

1. 集合 $A = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in \boldsymbol{N} \right\}$ を考える.
(1) A の上限 $\sup A$，下限 $\inf A$ を求めよ.
(2) (1) で求めた $\sup A$ と $\inf A$ が正しいことをそれぞれ定義にしたがって説明せよ． 「$\alpha = \sup A$ ($\inf A$) $\iff$ α は A の上界 (下界) の最小元 (最大元)」

2. 数列 $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$, $a_1 = \frac{1}{10}$ を考える.
(1) $a_n \leq \frac{1}{2}$ $(n \geq 1)$ を数学的帰納法で示せ.
(2) a_n は収束することを示し，極限値を求めよ.
(3) $a_1 = 2$ のとき，a_n の収束に関してどう予想できるか？予想した結果を証明せよ.

3. 関数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ |x|, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$ について考える.
(1) 右連続，左連続，連続をみたす x を求めよ.
(2) もし連続でない点があれば，その点が連続でないことを，次の連続性の定義に従って説明せよ．$f(x)$ が $x = x_0$ で連続とは,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ \ (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

4. $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を既知とするとき，e を底とする対数関数 $\log x$ の導関数を導け.

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい. 解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること.

1. 次の問いに答えよ.
   (1) $\sin 2x \cos(\tan x)$ の導関数を求めよ.
   (2) 対数法則 $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ を示せ. 対数関数については定義のみ用いて良い.

2. $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ を導け.

3. $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. $n \in \boldsymbol{N}$ のとき $a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a}$. 指数が自然数のときに指数法則を仮定する. 次の問いに答えよ.
   (1) $m, n \in \boldsymbol{N}$ に対して $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ を示せ.
   (2) $q = \frac{m}{n}$ $(m, n \in \boldsymbol{N})$ に対して (1) の左辺で a^q を定義する. $q_1 = \frac{m_1}{n_1}, q_2 = \frac{m_2}{n_2}$ $(m_j, n_j \in \boldsymbol{N})$ に対して $a^{q_1} a^{q_2} = a^{q_1 + q_2}$ を示せ.

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^6}{(1.5)^n} = 0$ をはさみうちの原理を用いて導け.

5. 関数 $y = 2x^2 - 4x + 4$ $(x \leq 1)$ について次の問いに答えよ.
   (1) 値域を求めよ.
   (2) 逆関数は存在するか? あれば理由を述べて求め, そのグラフをかけ. なければ「無し」と答えよ.

$\boldsymbol{N}$ は自然数全体を表す.

$\boxed{1}$ 数列の収束の判定法に，はさみうちの方法がある：$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} c_n = a$ のとき，「$\exists N \in \boldsymbol{N}$ s.t. $\forall n \geq N \implies a_n \leq b_n \leq c_n$」を b_n がみたしていれば，$\lim_{n\to\infty} b_n = a$. これを $\varepsilon - N$ 法により示せ.

$\boxed{2}$ 数列 a_n が $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|,\ n \in \boldsymbol{N}$ をみたしているとき，a_n はコーシー列であることを示せ.

$\boxed{3}$ $a > 1$ とする. $x \to \infty$ のとき，指数関数 a^x はどの x^k $(k \in \boldsymbol{N})$ よりも速く ∞ に増大することを示したい.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ を二項定理を用いて導け.

(2) (1) より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$ を導け.

$\boxed{4}$ 次の各問に答えよ.

(1) 定義に従って，$A = \{\arctan n :\ n \in \boldsymbol{N}\}$ の上限 $\sup A$，下限 $\inf A$ を求めよ. ただし，$\arctan x$ は $\tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数を表す.

(2) ボルツアノ・ワイエルシュトラスの定理とは何かを説明して，数列の上極限，下極限を定義するまでの過程を述べよ.

$\boxed{5}$ 数列 $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n},\ a_1 = 3$ を考える. 極限値 a があると仮定すると，漸化式の両辺を $n \to \infty$ として $a = 6 - \frac{5}{a}$. これを a について解くと $a = 1, 5$ を得る. 次の問に答えよ.

(1) $1 < a_n < 5,\ n \in \boldsymbol{N}$ を数学的帰納法で示せ.

(2) a_n は 5 に収束することを示せ.

(3) $a_1 \neq 1$ のとき，a_n は 1 に収束することがあるか？

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

1. $f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$ の $x=2$ における接線の方程式を求めよ.

2. 各問に答えよ.

   (1) $\arctan(\tan\frac{5\pi}{6})$ の値を求めよ．ただし，$\arctan(\tan x)$ は $u=\tan x$ と $y=\arctan u$ の合成を表す.

   (2) 関数 $\cos^2(x^4)$ の導関数を求めよ．ただし，$\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2$ を表す.

3. $y = \dfrac{4x+1}{1-2x}$ $(x<\frac{1}{2})$ の逆関数が存在することを説明せよ．また，逆関数のグラフをかけ.

4. $a>0, a\neq 1,\ m,n=1,2,3,\ldots$ を用いて $a^{\frac{m}{n}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt[n]{a^m}$ で定義する．このとき，

$$(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

   を示せ．ただし，指数が自然数のときの指数法則は仮定する.

5. はさみうちの原理の有用性をみる.

   (1) 二項定理から $(1+b)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}b^2\ \ (b>0)$ を導け.

   (2) (1) の結果を使って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1.1)^n} = 0$$

   を示せ.

$\boldsymbol{N}$ は自然数全体を表す.

1. $A=\{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}:m,n\in\boldsymbol{N}\}$ の上限を求めて，求めた値が正しいことを上限の定義に従って説明せよ.

2. 実数の連続性から導かれる命題として,「上（下）に有界な単調増加（減少）数列は収束する」がある．$a_1>3,\ a_{n+1}=\sqrt{6+a_n},\ n\in\boldsymbol{N}$ をみたす数列 a_n は収束することを示し，極限値を求めよ.

3. 小問の結果を用いながら順に答えよ.

   (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x$ が存在すれば求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0\ (k\in\boldsymbol{N})$ は用いてよい.

   (2) $f(x)=x^{\sqrt{x}}\ (0<x<1)$ について，増減，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)$ を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ.

   (3) 次の実数全体で定義された関数 $g(x)$ の右連続，左連続，連続な点を求めよ.

$$g(x)=\begin{cases}-x, & x\leq 0,\\ x^{\sqrt{x}}, & 0<x<1,\\ -x+2, & x\geq 1.\end{cases}$$

4. 次の各問に答えよ.

   (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1+2n}=\frac{1}{2}$ を $\epsilon-N$ 法で検証せよ.

   (2) 数列がコーシー列であるとはどういうことか？

   (3) コーシー列は有界であることを示せ.

   (4) (3) の結果から上極限，下極限の言葉を用いて，コーシー列は収束することを説明せよ．ただし，次の語句を含めること．ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理，部分列

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

1. 二項定理を用いて微分公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ を定義から直接導け.
2. 逆三角関数 $y = \arccos x$ の定義を，関数の逆関数の定義に従って正確に行え．また グラフをかけ.
3. $n, m \in \boldsymbol{N}$ に対して，$(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ を示せ．ただし，自然数を指数としたときの指数法則のみを仮定して，それ以外の結果は証明すること.
4. 次の極限値を求めよ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(1.01)^n}{n^4}$
5. 次の各問に答えよ.
   (a) 関数 $f(x) = \dfrac{(2+x)\cos(x^2)}{1+x^2}$ の $x = 0$ のおける接線の方程式を求めて，$f(-10^{-3})$ の近似値を計算せよ.
   (b) 指数法則を用いて対数関数の底の変換 $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ を証明せよ.
   (c) 関数 $y = -2 - \dfrac{\sin(\pi - 2x)}{3}$ のグラフをかけ.

$\boldsymbol{N}$ は自然数全体を表す.

1. $a > 1,\, k \in \boldsymbol{N}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$ を既知とする．次の各問に答えよ.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{a^x}$ の値を導け.

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x(\log x)^2$ は存在するか？存在するならば理由を述べて値を導け.

   (c) $f(x) = x^{x\log x}$ $(0 < x < 1)$ の増減を調べて，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ. $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x),\ \lim_{x\to 1-0} f(x)$ を調べること.

2. $A = \{(-1)^{n+1}\frac{1}{m} - \frac{1}{n} : m, n \in \boldsymbol{N}\}$ の $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ の値を求めよ．ただし，結果だけ答えるのではなく，下記のそれぞれの定義に従って理由を明らかにすること.

   $\sup A$ $(\inf A)$ は A の上界（下界）の最小元（最大元）を表す.

   $\max A$ $(\min A)$ は A の最大元（最小元）を表す.

3. $y = \arcsin x$ の導関数を逆関数の微分法に従って導け.

次の 3 問のうち<u>1 問を選択</u>して答えよ．<u>2 問以上答えてはいけない</u>.

4. $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n^2}{2}$，$a_1 \geq 0$ で定まる数列 a_n を考える．極限値が存在するための初項 a_1 の必要十分条件を求めよ．理由を明らかにすること.

5. コーシー列は収束することを示せ．ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理，上極限，下極限ということばを含めること.

6. $a_n \to a,\, b_n \to b,\, n \to \infty$ のとき，$a_n b_n \to ab$ であることを $\varepsilon - N$ 法で導け.

※ 解答すべき問題数は 4 である.

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．ただし，大問ごとにまとめること．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

1. 関数 $f(x)$ が x_0 で微分可能であることの解析的な定義を述べよ．また，この定義に従って $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ の導関数を求めよ．
2. 関数 $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$ の $x_0 = 2$ における接線の方程式を求めよ．また，接線の方程式に基づき $f(2.01)$ の近似値を小数で求めよ．
3. 関数 $y = 2x^2 - 4x$ $(0 \leq x \leq 1)$ の逆関数が存在するか判定せよ．もし存在するならば逆関数を求めて，座標平面内にそのグラフをかけ．
4. 恒等式 $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ を導け．
5. 関数 $f(x) = \cos(\sin(x^2))$ $(x \in \mathbb{R})$ について
   (a) $y = f(x)$ の値域を求めよ．
   (b) $f(x)$ の導関数を求めよ．
6. 各問に答えよ．
   (a) $a > 0, a \neq 1$ のとき，a の n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ $(n \in \mathbb{N})$ の定義を述べよ．
   (b) $m, n \in \mathbb{N}$ のとき，$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$ を導け．ただし，授業で証明した $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$ は既知として用いてよい．
7. 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!}$ の結果を述べてその証明をせよ．

1. 次の各問に答えよ．

   (a) 有理数全体 $\mathbf{Q}$ は稠密性をもつ，とはどういう性質か説明せよ．

   (b) 数列の上極限を定義せよ．ただし，次の語句を含めること．

   有界数列，部分列，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理

   (c) 数列がコーシー列であることの定義を述べよ．

   (d) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ の存在はどのような事実に基づいて示されるか述べよ（証明をもとめているのではない）．

2. 次の各問に答えよ．

   (a) 上に有界な集合の上限を定義せよ．

   (b) (a) で述べた定義に従って 次の集合 A の上限を求めよ．

$$A = \left\{1-\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$$

3. $a_n = \dfrac{2n+1}{1-3n}$ が $-\dfrac{2}{3}$ に収束することを $\varepsilon - N$ 法で検証したい．そこで

$$n \geq N \quad \text{ならば} \quad \left|a_n - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < 10^{-2}$$

   を満たす N を一つ決定せよ．

4. 関数 $f(x) = [x]$ $(x \in \mathbf{R})$ において，右連続な点，左連続な点，連続な点をすべて挙げよ．

5. $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $a_1 = \dfrac{1}{4}$ を満たす数列 a_n は収束することを示し，極限値を求めよ．

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと（計算用紙は回収しない）.
- 番号順に解かなくてもよい．ただし，大問ごとにまとめること.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.

$\boxed{1}$ 関数 $f(x) = -x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ の $x_0 = 1$ における接線の方程式を求めよ．また，接線の方程式に基づき $f(0.98)$ の近似値を小数で求めよ.

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ.

(1) 導関数の定義に従って $\cos x$ の導関数を導け．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ は用いてよい.

(2) (1) の結果と等式 $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ から $\sin x$ の導関数を導け.

(3) $\tan x$ の導関数を導け.

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = -\dfrac{6x}{2x-1}\ \left(x < \dfrac{1}{2}\right)$ の逆関数が存在することを示して，逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフをかけ.

$\boxed{4}$ $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$ を導け.

$\boxed{5}$ 次の各問に答えよ.

(1) $\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ.

(2) 次の命題を証明せよ.「有理数 p, q について，$p + q\sqrt{6} = 0$ ならば $p = q = 0$ である」

$\boxed{6}$ 正の有理数 p, q について，$a^p a^q = a^{p+q}$ を導け．ただし，自然数 m, n に対して，有理数べき $a^{\frac{m}{n}}$ は $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ で定義する．自然数べきに対する指数法則は仮定する．授業で証明した $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ は用いてよい.

$\boxed{7}$ 指数法則と対数関数の定義のみを用いて $\log_a x^p = p\log_a x$ を導け.

$\boxed{8}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1.001)^n}{n^7} = \infty$ を証明せよ.

平成 **27** 年度 解析学の基礎 **I** 期末試験問題　　2015 年 8 月 5 日 (水) 実施

(注意)

- 解答はすべて解答用紙にかくこと.
- 番号順に解かなくてもよい. 解きたい順に解答して構わない. ただし, 大問毎にまとめること.
- 解答用紙には学生番号, 氏名を忘れずにかくこと.
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること.

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$ について, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を $\varepsilon - N$ 法で示せ.

(2) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{4}$ について, 上極限 $\displaystyle\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, 下極限 $\displaystyle\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(3) $(e^x)' = e^x$ を既知として, $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ を導け.

$\boxed{2}$ 集合 $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \dfrac{1}{3m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ について, 次の各問に答えよ.

(1) A は上に有界であることを示せ.

(2) A の上限 $\sup A$ を求めて, それが正しいことを上限の定義にしたがって説明せよ.

$\boxed{3}$ $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $0 < a_1 < 3$ を満たす数列 a_n について, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを示せ.

$\boxed{4}$ a_n がコーシー列ならば収束することを説明せよ. ただし, 次の語句を含めること: 有界, ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理, 収束する部分列, 上極限, 下極限

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ が右極限値 $\displaystyle\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ をもつとき, $\displaystyle\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ ならば x_0 で**右連続**であるという (**左連続**も同様に定義).

関数 $f(x) = [2 - x]$ (ただし $[t]$ は t を超えない最大の整数を表す) について, 次の各問に答えよ.

(1) $[2 - x] = \left[\dfrac{x-2}{-1}\right]$ とみることができるから, 関数 $[2 - x]$ のグラフは関数 $[x]$ のグラフを $\boxed{\text{(a)}}$ により変形したものである. (a) に変形の仕方をかけ.

(2) $0 < x < 3$ の範囲で f の連続な点, 右連続な点, 左連続な点をすべて求めよ.