1. $\dfrac{1}{x^2}$ は $x \to \infty$ のとき，$\dfrac{1}{x}$ よりも高位の無限小であることを示せ：$\dfrac{1}{x^2} = \mathrm{o}(\dfrac{1}{x}),\ x \to \infty$

2. 不等式 $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$ $(x \neq 0)$ をテイラーの定理を用いることで導け.

3. $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$ $(x \geq 0)$ のグラフをかけ．ただし，増減，凸性，極値，$x \to \infty$ における挙動を調べよ.

4. $f(x) = x^2 \sin x$ の n 次導関数を求めることによって，f は $x = 0$ でマクローリン級数展開可能 (収束半径 ∞) であることを示せ．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $(a > 0)$ は既知としてよい.

5. つぎの問の中から**2 つ選んで**答えよ.

   (a) $f(x) = x^{\cos \pi x}$ の $x = 2$ における微分係数を求めよ.

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}}$ の導関数を求めよ.

   (c) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ を導け．ただし，$\arctan x$ は $\tan x$ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ の逆関数である.

   (d) $f(x) = \log(1 - 3x)$ の $x = 0$ における 3 次近似多項式を求めよ.

K.U.

1. 閉区間 $[a,b]$ で定義された関数 f が定積分可能であるということを説明せよ．ただし，少なくとも次の語句を定義して含めること．

分割，分割の幅，リーマン和

次の**５題から４題を選択**して答えよ．

2. f は $[a,b]$ 上連続な関数とする． $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ a < x < b$ で F を定めるとき，F は f の原始関数であることを示せ．

3. 定積分 $\displaystyle\int_e^{e^2} x(\log x)^2 dx$ を求めよ．

4. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$ を求めよ．不定積分の任意定数 C は省略してかまわない．

5. 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4} dx$ を求めよ．

6. 曲線 $C : x = r(t)\cos t,\ y = r(t)\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ r(t) = 1 + \sin t$ を考える．

   (a) C の概形を描け．

   (b) C の長さを求めよ．

K.U.

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

1. a, b を実数とする．$f(x) = x^4 + ax + b$ について，条件を一つ課して $f(x) = 0$ が少なくとも 1 つ実数解をもつことを示せ．

2. $f(x)$ は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能とする．(a, b) の任意の点 x で $f'(x) > 0$ をみたすとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で単調に増加することを示せ．

3. 半径 1 の円に内接する長方形の面積を考える．
   (1) 長方形の一辺の長さを x とするとき，面積 $S(x)$ を求めよ．
   (2) 関数 $S(x)$ の定義域と値域を求めよ．また，面積が最大となる長方形はどのようなときか？

4. $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{1+x}$ について，
   (1) $f(x)$ の 3 次のマクローリンの定理をかけ．ただし，剰余項は R_3 とかけば良い．
   (2) $f(10^{-2})$ の値は 0.98 より大きいと考えられるか，それとも小さいと考えられるか？

5. 次の問に答えよ．
   (1) $f(x) = x^2 \cos x$ について n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．
   (2) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^n \log |x| \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ を求めよ．
   (3) $\sin x$ の導関数から $\arcsin x$ の導関数を導け．

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい. 解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく, それに至る過程を記述すること.

1. 次の問に答えよ.

   (1) 定積分の平均値の定理をかけ.

   (2) $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して $S(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (a < x < b)$ とおくとき, (1) を用いて $S'(x) = f(x)$ を導け.

2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx$ の値を求めよ.

3. $\int \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 6x + 12} \, dx$ を求めよ.

4. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} dx$ を求めよ.

5. ガンマ関数 $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \quad (s > 0)$ について, $\Gamma(n+1) = n! \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ を数学的帰納法で示せ.

6. $f(x) = x$ が $[a, b]$ 上定積分可能であることを示せ.

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

1. (1) 中間値の定理をかけ．
   (2) 4次方程式 $x^4+x^3-2x^2-6=0$ は少なくとも 2 つ実数解をもつことを示せ．

2. (1) n 次導関数 $(\log(1+2x))^{(n)}$ の形を予想して，数学的帰納法で証明せよ．
   (2) n 次導関数 $(x^2\log(1+2x))^{(n)}$ を求めよ．

3. (1) $\sin x$ の 2 次のマクローリンの定理をかけ．
   (2) (1) を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を求めよ．
   (3) $x>0$ のとき，x と $\sin x$ の大小関係を判定せよ．

4. $y=x^3e^{-x}$ の増減，凸性，及び $x\to\pm\infty$ における挙動を調べて，グラフの概形をかけ．

平均値の定理に関する次の問題のうち，どちらか１問選択して答えよ．

5. $f(x)=\arctan x$ は $x>0$ において一様連続であることを示せ．

6. $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能な $f(x)$ が，$f'(x)>0$ $(\forall x\in(a,b))$ であるとする．このとき，$f(x)$ は $[a,b]$ において単調増加な関数であることを示せ．

$\boxed{\text{~~解答は次ページ~~}}$

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと.
- 番号順に解かなくてもよい．解きたい順に解答して構わない.
- 解答は結果だけでなく，それに至る<u>過程を記述すること</u>.

1. 連続関数 $f(x)$ を区間 $[a,b]$ で考える．$a \leq x \leq b$ に対して $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ で $S(x)$ を与える.
   (1) 積分の平均値の定理を用いて $S'(x) = f(x)$ を導け.
   (2) $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に対して $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ を示せ.

2. $p > 0$ について，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ が広義積分可能であるための必要十分条件を求めよ.

3. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 4x + 6}dx$ を求めよ.

4. 不定積分 $\displaystyle\int x^5 e^{-x^2} dx$ を求めよ.

5. 置換積分を用いて $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \cos^3 x dx$ を求めよ.

6. $f(x) = x^3$ が区間 $[0,1]$ で定積分可能であることを定義に従って示せ.

1. (有界閉区間上の連続関数) 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数がもつ特徴的な性質を 4 つ述べよ.

2. (連続性) $f(x), g(x)$ が x_0 で連続のとき，$f(x) + g(x)$ も連続であることを $\varepsilon - \delta$ 法で示せ.

3. 次の各問いに答えよ.
   (1) (高位の無限小) $\tan x - \sin x = \mathrm{o}(x^2), \quad x \to 0$ を導け.
   (2) (対数微分法) $x^{\log x}$ の導関数を求めよ.
   (3) (n 次導関数) $x^4 e^{-x}$ の n 次導関数を求めよ.

4. (マクローリンの定理)
   (1)$f(x) = \sin x$ の $x = 0$ における 3 次近似 $g(x)$ を求めよ.
   (2) $f(x) > g(x), \quad x \in (0, \pi)$ であることを導け.

5. (関数の凸性)
   (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ において上に凸であることの定義を述べよ.
   (2) $f(x)$ は開区間 (a, b) 上で 2 回微分可能で $f''(x) < 0$ をみたすとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で上に凸であることを平均値の定理を用いて示せ. (1) の定義にしたがって示すこと.

1. 区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ を考える.
   (1) $f(x)$ について積分の平均値の定理を書け.
   (2) $S(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ とおくとき，(1) の定理を用いて $S'(x)=f(x)$ を導け.
   (3) $f(x)$ の任意の原始関数 $F(x)$ に対して $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ を示せ.

2. 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{x^3+1}dx$ を考える.
   (1) x^3+1 を因数分解せよ.
   (2) (1) を利用して不定積分を求めよ.

3. 区間 $[a,b]$ で単調増加な関数 $f(x)$ は定積分可能であることを定積分の定義に従って示せ.

4. 次の定積分を計算せよ.
   (1) $\displaystyle\int_{-1}^0\frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}dx$
   (2) $\displaystyle\int_1^e x^3\log x dx$

1. 次の関数の中から一様連続なものを選び，証明をせよ．
   (a) $x^2 \quad (x \geq 1)$
   (b) $\sin x \quad (x \in \mathbf{R})$
   (c) $\dfrac{x-1}{x} \quad (x \geq 1)$

2. 次の問に答えよ．

   (1) ロルの定理，平均値の定理をかけ．

   (2) ロルの定理から平均値の定理を導け．

3. マクローリンの定理を用いて，次の不等式を導け．

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \qquad 0 < x < \pi.$$

4. $f(x) = x^2 e^{-3x}$ について次の問に答えよ．

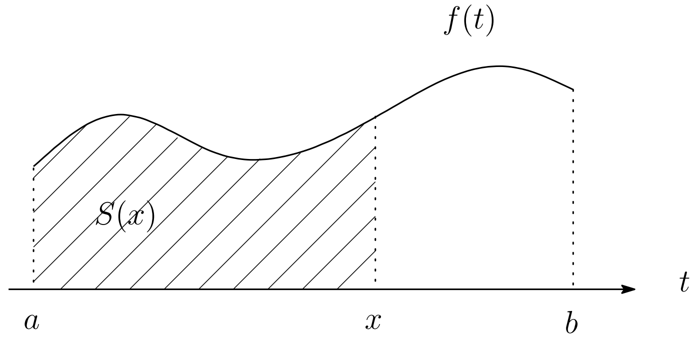
   (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．ただし，増減，凸性，$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ を調べること．

   (2) $f(x)$ の n 次導関数を求めよ．

   (3) $x > 0$ とする．$f(x)$ はマクローリン展開可能であることを示せ．

1. 閉区間 $[a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ が単調増加であるとき，$f(x)$ は $[a,b]$ 上定積分可能であることを示せ．$\varepsilon-\delta$ 法による定積分可能性の議論に従うこと．

2. $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して $S(x)=\int_a^x f(t)dt$ で $S(x)$ を定義する．



このとき，次の問に答えよ．

(a) $S'(x)=f(x)$ を導け．定積分の性質は証明無しで用いてよい．

(b) $F(x)$ を $f(x)$ の勝手な原始関数とするとき，$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ を導け．

3. 不定積分 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x-e^{-x}+2}\,dx$ を求めよ．

4. 次の定積分を求めよ．

(a) $\displaystyle\int_1^e x\,(\log x)^2\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\cos^2 x\,dx$

1. $f(x)$ は $[a,b]$ で連続である．平均値の定理に基づいて次の各問に答えよ．

   (a) $f(x)$ は (a,b) で微分可能とする．このとき，$f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$ ならば $f(x)$ は $[a,b]$ で狭義単調増加であることを示せ．

   (b) $f(x)$ は (a,b) で 2 回微分可能とする．このとき，$f''(x) > 0, \forall x \in (a,b)$ ならば $f(x)$ は $[a,b]$ で下に凸であることを示せ．ただし，$f(x)$ が下に凸であることの定義を明示して示すこと．

2. 次の各問に答えよ．

   (a) 4 次方程式 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$ は少なくとも 2 つの解をもつことを示せ．

   (b) n 次導関数 $(x\log(1+2x))^{(n)}$ を求めよ．

   (c) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, \quad x \to 0$ を示せ．ただし，$f(x), g(x) \to 0,\ x \to 0$ のとき，$f(x) \sim g(x),\ x \to 0$ は同位の無限小を表す．

3. $f(x) = \sin 2x$ の $x_0 = \frac{\pi}{3}$ における 3 次のテイラーの定理をかき，2 次近似多項式を求めよ．さらに，その結果から x_0 における増減，凸性を答えよ．

4. $f(x) = e^x$ について

   (a) 4 次のマクローリンの定理をかけ．

   (b) (a) の結果から，剰余項を評価して $2.6 < e < 2.8$ を導け．

1. 次の各問に答えよ．
   (a) 閉区間 $[a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対して，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を定義せよ．その際，リーマン和，上積分，下積分についての記述を含めること．
   (b) (a) の定義に従って $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は定積分可能であることを示せ．

2. $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ に対して $S(x)=\int_a^x f(t)dt$ で $S(x)$ を定義する．次の各問に答えよ．定積分の基本性質を用いるときはどの性質を用いるかを明記せよ．
   (a) $S'(x)=f(x)$ を導け．
   (b) $f(x)$ の任意の原始関数 $F(x)$ に対して $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ であることを導け．

3. 次の不定積分，定積分を計算せよ．不定積分の任意定数は略してよい．
   (a) $\displaystyle\int x^2 \arctan x\, dx$
   (b) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{(\log x)^m}{x} dx, \quad m=1,2,3,\dots$

4. 関数 $f(x)=(x-1)e^x$ について次の各問に答えよ．
   (a) $x_0=-1$ における 4 次のテイラーの定理をかけ．ただし，剰余項は R_4 と記述してよい．
   (b) (a) の結果に従って $(-1, f(-1))$ の近くの $y=f(x)$ のグラフの形状を推定して，(x,y) 平面に図示せよ．

(注意)

- 解答はすべて解答用紙に書くこと．
- 番号順に解かなくてもよい．ただし，大問ごとにまとめること．
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．

1. 関数 $f(x)$ が x_0 で微分可能であることの解析的な定義を述べよ．また，この定義に従って $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ の導関数を求めよ．
2. 関数 $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+2}$ の $x_0 = 2$ における接線の方程式を求めよ．また，接線の方程式に基づき $f(2.01)$ の近似値を小数で求めよ．
3. 関数 $y = 2x^2 - 4x$ $(0 \leq x \leq 1)$ の逆関数が存在するか判定せよ．もし存在するならば逆関数を求めて，座標平面内にそのグラフをかけ．
4. 恒等式 $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ を導け．
5. 関数 $f(x) = \cos(\sin(x^2))$ $(x \in \mathbb{R})$ について
   (a) $y = f(x)$ の値域を求めよ．
   (b) $f(x)$ の導関数を求めよ．
6. 各問に答えよ．
   (a) $a > 0, a \neq 1$ のとき，a の n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ $(n \in \mathbb{N})$ の定義を述べよ．
   (b) $m, n \in \mathbb{N}$ のとき，$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}$ を導け．ただし，授業で証明した $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$ は既知として用いてよい．
7. 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!}$ の結果を述べてその証明をせよ．

$\boxed{1}$ 区間 $[0,2]$ で定義された $y=x^2$ が定積分可能であることを $\varepsilon-\delta$ 法による定義に従って示せ.

$\boxed{2}$ 次の各問に従って不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^3-6x^2+13x+1}{x^2-6x+11}dx$ を求めよ.

(1) $x^3-6x^2+13x+1$ を $x^2-6x+11$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とする. $Q(x), R(x)$ を求めよ.

(2) 不定積分を求めよ.

$\boxed{3}$ $[a,b]$ の連続関数 $f(x)$ について，$S(x)=\int_a^x f(t)dt$, $a \leq x \leq b$ とおく．$F(x)$ を $f(x)$ の勝手な原始関数とするとき，$S(b)=F(b)-F(a)$ を導け.

$\boxed{4}$ 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) $x^{\cos x}$ の導関数を求めよ．

(2) $1-(t+1)e^{-t} = \mathrm{o}(\sin t),\ \ t \to 0$ を示せ．ただし，$f(t), g(t)$ が $t \to 0$ で無限小のとき，$f(t) = \mathrm{o}(g(t)),\ \ t \to 0$ は $f(t)$ が $g(t)$ の高位の無限小であることを表す．

(3) $f(x) = \sqrt{x}\ \ (x \geq 1)$ は一様連続であることを示せ．

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ．

(1) 有界閉区間 $[a, b]$ で連続な関数のもつ特徴的な性質を 4 つ 挙げよ（箇条書きでよい）．

(2) (1) で挙げた性質の中でひとつを選んで，$[a, b]$ で連続 でない 関数では一般に成り立たないことを反例を示して説明せよ．

$\boxed{3}$ ロルの定理を仮定して平均値の定理を導け．

$\boxed{4}$ $f(x) = \log(1+x)$ について次の各問に答えよ．

(1) $x_0 = 0$ における $f(x)$ の 2 次近似多項式 $g(x)$ を求めよ．また，$f(x) < g(x)$ $(-1 < x < 0)$ を導け．

(2) n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を予想して数学的帰納法で検証せよ．

(3) $f(x)$ がマクローリン級数展開可能であるかを考える．$0 < x \leq 1$ で級数展開可能であることを示せ．また，この結果を用いて

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

を示せ．

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ は $[a,b]$ で有界であるとする．もし $f(x)$ が単調増加 $(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$ ならば定積分可能であることを示せ（定積分可能性の定義に従って示せ）．

$\boxed{2}$ $[a,b]$ の連続関数 $f(x)$ について，$S(x) = \int_a^x f(t)dt,\ a \leq x \leq b$ とおく．特に $S(b) = \int_a^b f(x)dx$ である．さて，$F(x)$ を $f(x)$ の勝手な原始関数とするとき，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

を導け.

$\boxed{3}$ 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$

(2) $m > 1$ とする．$\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x^m} dx$

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ．ただし，任意定数 C は省略してよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$

(2) $\displaystyle\int x^2 \arctan x\, dx$

$\boxed{5}$ $t = \tan\frac{x}{2}$ で置換して，不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$ を計算せよ.