Global bifurcation of positive solutions for some elliptic problems with nonlinear boundary conditions

洞爺解析セミナー

2010-09-28

梅 津 健一郎（茨城大学教育学部）

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, 滑らかな境界をもつ有界領域.

$\lambda \geq 0$, $q > 1$,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda(m(x)u - u^2) & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \lambda b(x) u^q & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

$0 < \alpha < 1$,

$m \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, $m > 0$ somewhere in Ω,

$b \in C^{1+\alpha}(\partial\Omega)$, $b > 0$ somewhere on $\partial\Omega$.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot d\nabla u + m(x)u - u^2, & (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega \\
u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega \\
d\nabla u \cdot n = b(x)u^q, & (t,x) \in (0,\infty) \times \partial\Omega
\end{cases}
$$

u, population density,

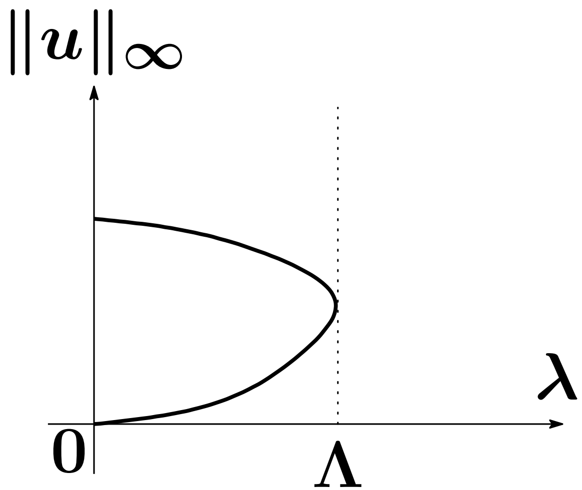
$d > 0$, diffusion rate

$\Longrightarrow$ the steady state problem with $\lambda = \dfrac{1}{d}$

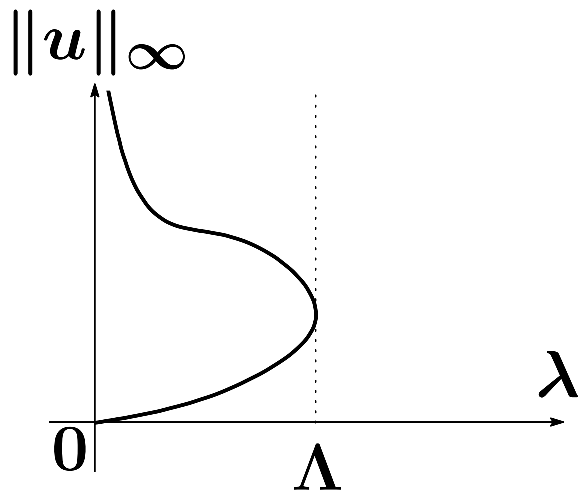
Ambrosetti, Brezis and Cerami (1994):

$0 < q < 1 < p$,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

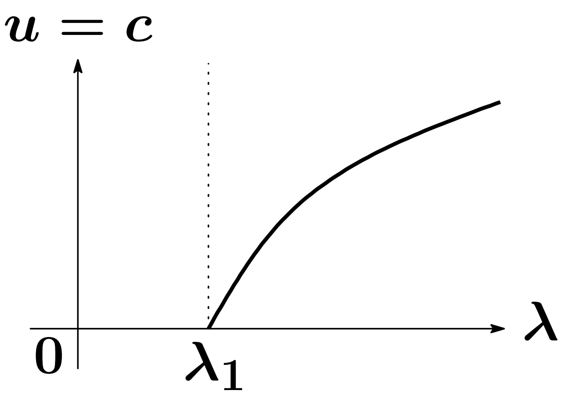


$p + 1 < \frac{2N}{N-2}$

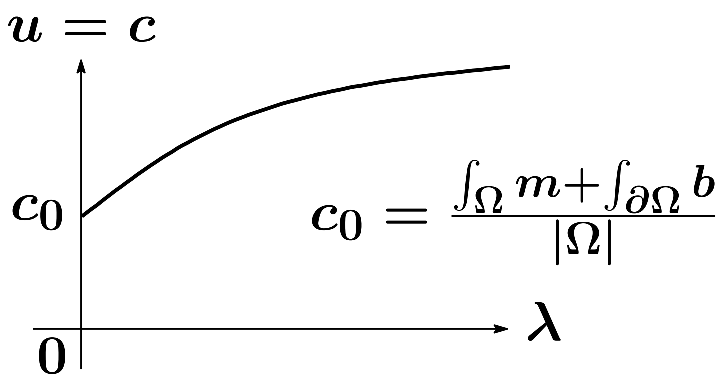


$p + 1 = \frac{2N}{N-2}$

$$q = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda b(x) u \quad \text{[U. (2006)]}$$



$\int_\Omega m + \int_{\partial\Omega} b < 0$



$\int_\Omega m + \int_{\partial\Omega} b \geq 0$

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla \phi|^2}{\int_\Omega m\phi^2 + \int_{\partial\Omega} b\phi^2} : \phi \in W^{1,2}(\Omega),\ \int_\Omega m\phi^2 + \int_{\partial\Omega} b\phi^2 > 0 \right\}$$

$$\int_\Omega m + \int_{\partial\Omega} b < 0 \implies \lambda_1 > 0$$

$$\int_\Omega m + \int_{\partial\Omega} b \geq 0 \implies \lambda_1 = 0$$

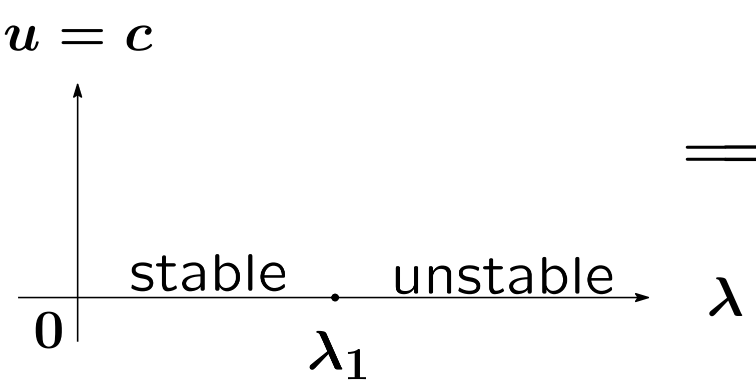
仮定： $\int_\Omega m < 0$

$$-\Delta\varphi = \lambda m\varphi \quad \text{on } \partial\Omega, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

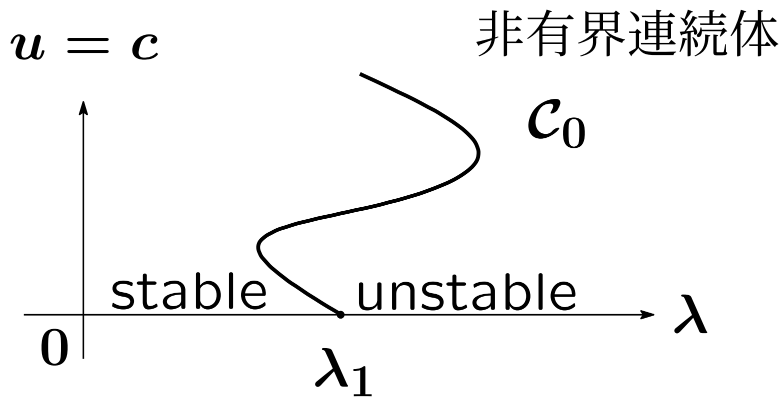
$\Longrightarrow$ 0, $\lambda_1(m) > 0$: principal eigenvalues

$\Longrightarrow$ $(\lambda_1, 0)$ からの大域的分岐枝（連続体）の存在

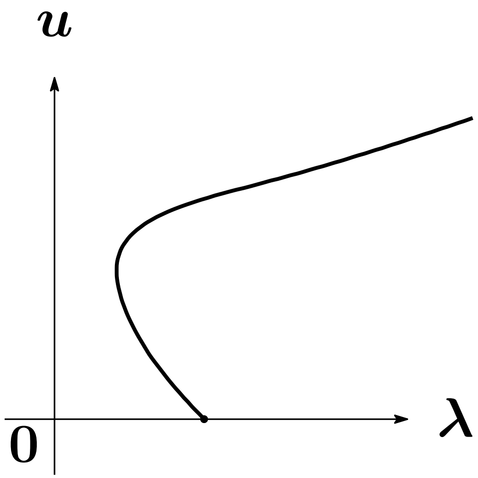
(López-Gómez (2001))

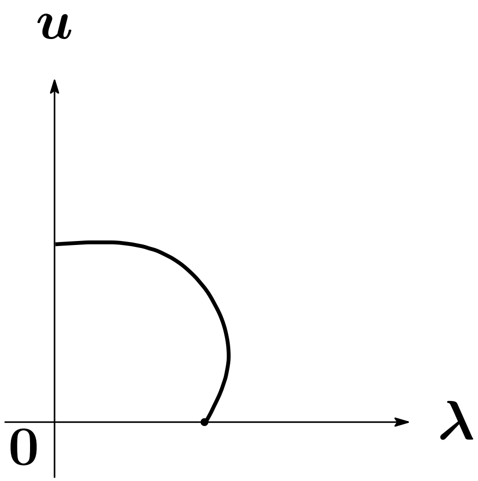


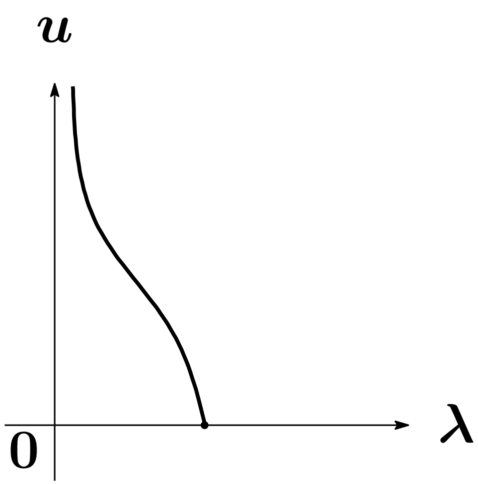
$\Longrightarrow$

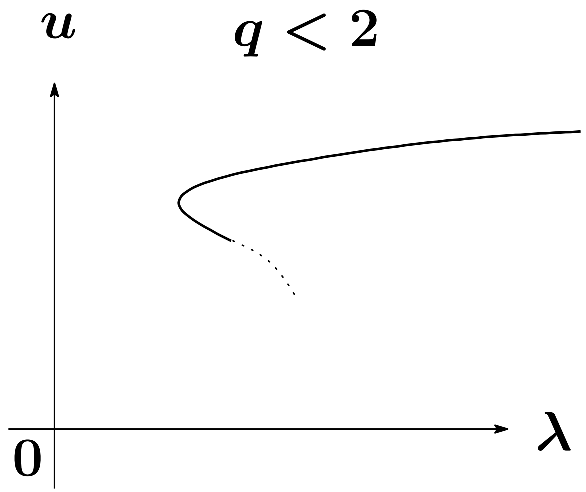


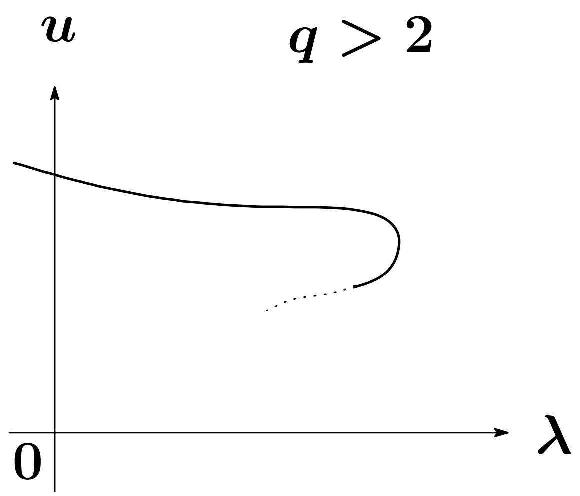
$\int_\Omega m \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$ は unstable $(\lambda > 0)$

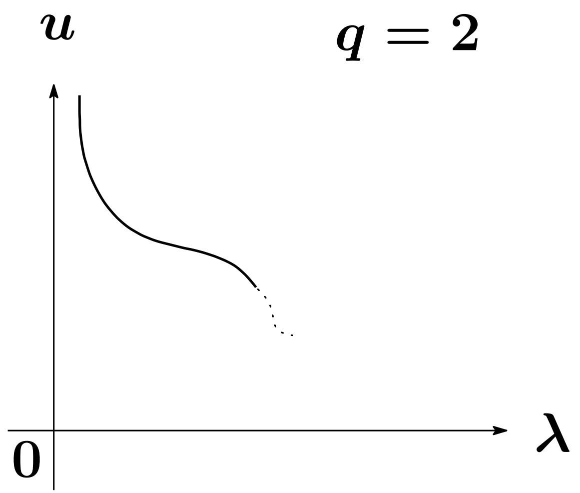

u
λ
0


u
λ
0


u
λ
0







$\lambda_j > 0$, 正値解 (λ_j, u_j), $\lambda_j \to \Lambda$, $\|u_j\|_\infty \to \infty \implies \Lambda = 0, \infty$

A priori bounds

定理 (Morales-Rodrigo (2004)): $b > 0$, $2 \le N \le 5$,
$\frac{3}{2} < q < \frac{N}{N-2}$ を仮定する．このとき,

$$0 < \alpha < \beta, \ I = [\alpha, \beta], \ \exists C_I > 0 \text{ s.t.}$$

$$\forall \lambda \in I \ (\text{任意の正値解 } (\lambda, u) \implies \|u\|_\infty \le C_I).$$

定理 (U. (2010)): $2 \le N \le 5$,

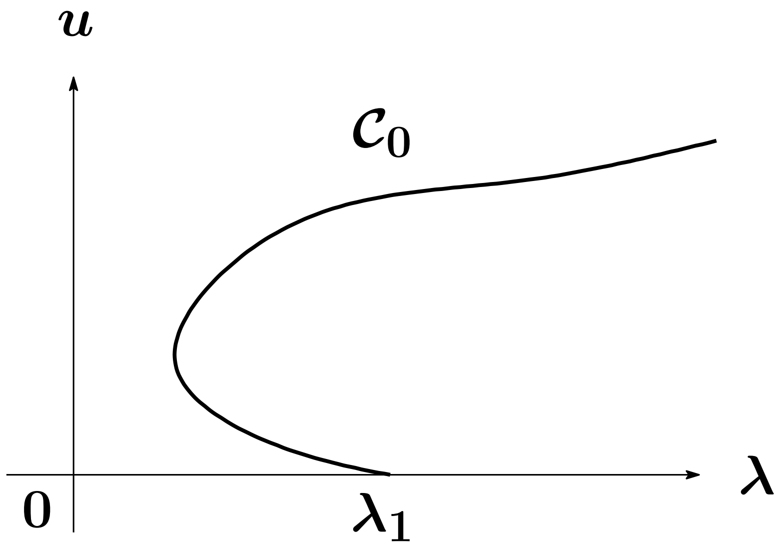
$$q_0(N) = 1 + \frac{4}{N + 3 + \sqrt{N^2 - 2N + 25}} \quad (\le \frac{7}{5}, \quad \text{等号は } N = 2),$$

$1 < q < q_0(N)$ を仮定する．このとき,

$$\beta > 0, \ I = (0, \beta], \ \exists C_I > 0 \text{ s.t.}$$

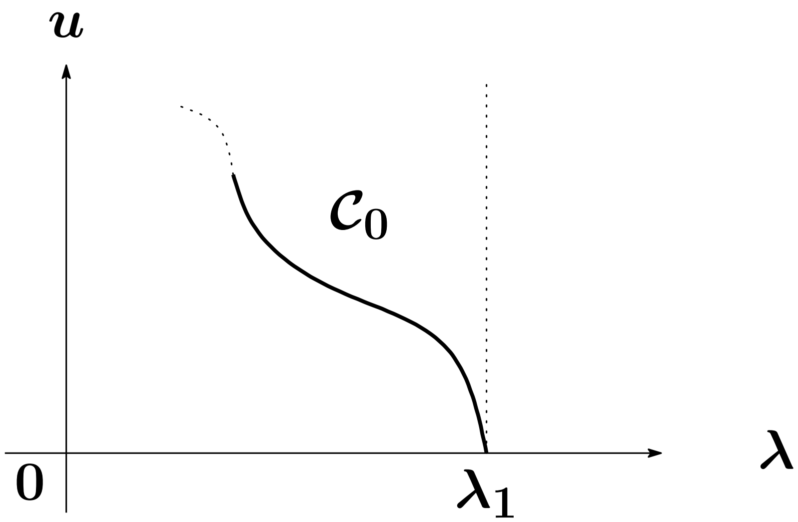
$$\forall \lambda \in I \ (\text{任意の正値解 } (\lambda, u) \implies \|u\|_\infty \le C_I).$$

$\boxed{\textbf{主定理１}}$　$2 \leq N \leq 5$, $1 < q < q_0(N)$,
$\overline{m} = \dfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega m dx$, $m_q = \dfrac{(q-1)^{q-1}(2-q)^{2-q}}{(-\overline{m})^{2-q}}$, $|\Omega| > m_q \int_{\partial\Omega} b ds$,
$\int_{\partial\Omega} b\,\varphi_1^{q+1} ds > 0$ を仮定する．ただし，φ_1 は λ_1 の正値固有関数．このとき，$\mathcal{C}_0$ は下図のような振る舞いをする．



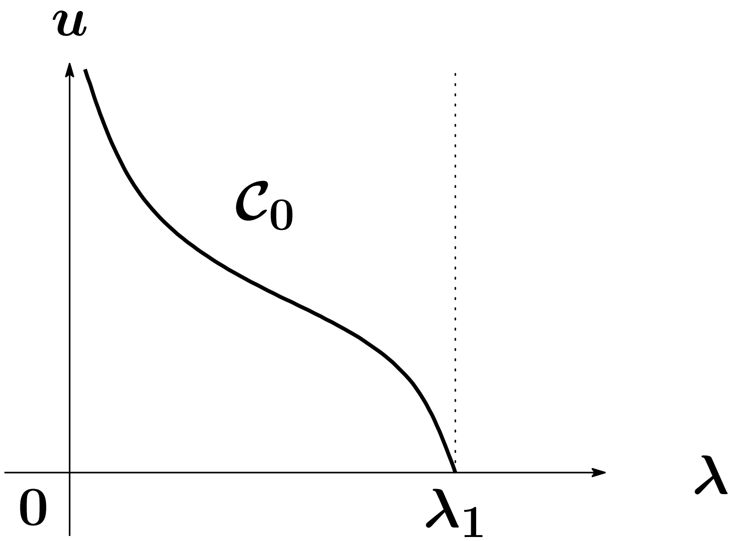
仮定：$b > 0$ on $\partial\Omega$, $q = 2$

補題: $\int_{\partial\Omega} b\varphi_1^3 \geq \int_\Omega \varphi_1^3$ ならば $\mathcal{C}_0$ は $\lambda = \lambda_1$ でsubcritical bufurcation を起こす．さらに，$\lambda = \lambda_1$ で正値解をもたない．



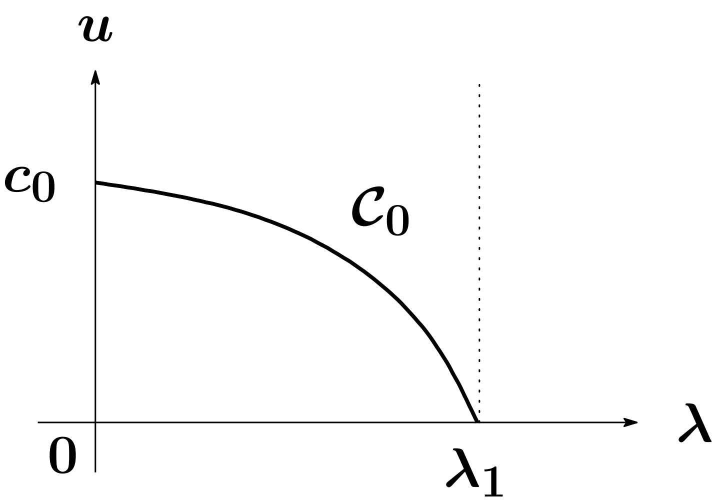
$\boxed{\textbf{主結果 2}}$ $\boldsymbol{N = 2, 3}$, $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b}\varphi_1^3 \geq \int_\Omega \varphi_1^3$ を仮定する．このとき，次の (i), (ii) が成立する．

(i) $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{\Omega}|$ ならば $\mathcal{C}_0$ は $\boldsymbol{u}$ 軸に触れず，$\boldsymbol{\lambda = 0}$ でのみ bifurcation from infinity を起こす．また，$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{C}_0$，$\boldsymbol{\lambda > 0, \lambda \sim 0}$ は unstable であり，もし $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{\Omega}|$ ならば一意正値解 である．さらに，$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{C}_0$，$\boldsymbol{\lambda < \lambda_1, \lambda \sim \lambda_1}$ は一意正値解かつ unstable である．



課題: $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{\Omega}|$ かつ $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b}\varphi_1^3 \geq \int_\Omega \varphi_1^3$ をみたす $\boldsymbol{m, b}$？ $\dfrac{\int_\Omega \varphi_1^3}{\int_{\partial\Omega} \varphi_1^3} < \dfrac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}$

(ii) $\int_{\partial\Omega} b > |\Omega|$ ならば $\mathcal{C}_0$ は $(\lambda, u) \in (0, \lambda_1) \times C(\overline{\Omega})$ において bounded であって，u 軸に触れる． また，$(\lambda, u) \in \mathcal{C}_0$，$\lambda > 0, \lambda \sim 0$ は一意正値解かつ unstable であって，$\displaystyle\lim_{\lambda \to +0} u_\lambda = \frac{\int_\Omega m}{|\Omega| - \int_{\partial\Omega} b}$ をみたす． さらに，$(\lambda, u) \in \mathcal{C}_0$，$\lambda < \lambda_1, \lambda \sim \lambda_1$ は一意正値解かつ unstable である．



$$c_0 = \frac{\int_\Omega m}{|\Omega| - \int_{\partial\Omega} b}$$

先行研究: 吸収(concave)（内部）＋ 爆発(convex)（境界）

(1) 共に u^p $(p > 1)$

- Chipot, Fila and Quittner (1991): $a, b > 0$, constant,

$$-\Delta u = -au^p \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = bu^q \quad \text{on } \partial\Omega.$$

- Pflüger (1999): $a(x), b(x)$, sign-changing,

$$(-\Delta + r(x))u = a(x)u^p \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = b(x)u^q \quad \text{on } \partial\Omega.$$

$\mu_1(-\Delta + r)_N > 0$ (coercive), $\quad \mu_1(-\Delta + r)_N = 0$

(cf. Berestycki, Capuzzo-Dolcetta and Nirenberg (1995) for $b \equiv 0$)

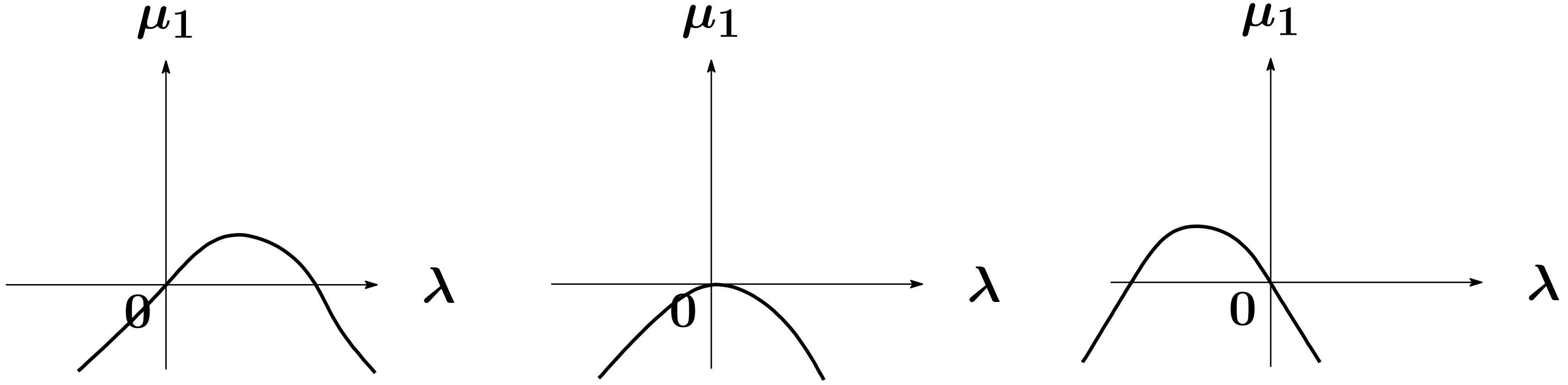
(2) ロジスティックタイプ $+\ \boldsymbol{u^q}$

• Morales-Rodrigo and Suárez (2005); García-Melián, Morales-Rodrigo, Rossi and Suárez (2008):

$$-\Delta u = \lambda u - u^p \ \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = u^q \ \text{ on } \partial\Omega.$$

$$\Longrightarrow\ (-\Delta - \lambda)u = -u^p \ \Longrightarrow\ \mu_1(-\Delta - \lambda)_N \le 0 \text{ (noncoercive)}$$

• U.(2004, 2010): $(-\Delta - \lambda m(x))u = -\lambda u^2$



$\int_\Omega m < 0$ $\int_\Omega m = 0$ $\int_\Omega m > 0$

主定理２(ii)の証明の概略　(I) $\boldsymbol{u}$ 軸（正定数解の枝）から２次分岐が起こることを分岐方程式から導く．$\Longrightarrow$ ただ一つの分岐点 $(\mathbf{0}, \boldsymbol{c_0})$ の存在.

(II) $\boldsymbol{v = \lambda u}$ で変換.

$$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v}): \quad -\boldsymbol{\Delta v = \lambda m v - v^2} \ \text{ in } \boldsymbol{\Omega}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b v^2} \ \text{ on } \partial\boldsymbol{\Omega}.$$

Morales-Rodrigo の *a priori* bounds より,

$$\boldsymbol{I} = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}], \ \exists \boldsymbol{C_I} > \mathbf{0} \ \text{ s.t. } \forall \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{I} \ ((\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v}) \Longrightarrow \|\boldsymbol{v}\|_\infty \le \boldsymbol{C_I}).$$

これより,

$$(\boldsymbol{\lambda_j}, \boldsymbol{v_j}), \ \boldsymbol{\lambda_j} \to +\mathbf{0} \Longrightarrow (\boldsymbol{\lambda_j}, \boldsymbol{v_j}) \to (\mathbf{0}, \ \exists \boldsymbol{v_0}) \ \text{ in } \mathbb{R} \times \boldsymbol{C^2}(\overline{\boldsymbol{\Omega}}),$$

$$-\boldsymbol{\Delta v_0} = -\boldsymbol{v_0^2} \ \text{ in } \boldsymbol{\Omega}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v_0}}{\partial \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{b v_0^2} \ \text{ on } \partial\boldsymbol{\Omega}.$$

補題: $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b} \ge |\boldsymbol{\Omega}| \Longrightarrow \boldsymbol{v_0} = \mathbf{0}$.

$\because \ \exists \boldsymbol{v_0} > \mathbf{0} \Longrightarrow \int_\Omega \mathbf{1} = \int_\Omega \frac{\boldsymbol{\Delta v_0}}{\boldsymbol{v_0^2}} = \int_\Omega \frac{\mathbf{2}|\boldsymbol{\nabla v_0}|^2}{\boldsymbol{v_0^3}} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b}.$

$\int_\Omega \boldsymbol{m} < \mathbf{0}$, $\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b} > |\boldsymbol{\Omega}|$ のもとで，$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ における分岐解の様子 $\Longrightarrow$ Crandall-Rabinowitz 理論から解曲線を得る：

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{s}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})) = (\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{s}),\ \boldsymbol{s}(\mathbf{1} + \boldsymbol{z}(\boldsymbol{s}))), \quad |\boldsymbol{s}| \ll \mathbf{1}, \\
&\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{0}) = \mathbf{0},\ \boldsymbol{z}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

さらに，分岐の方向について次の極限値を得る．

$$\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{0}) = \lim_{\boldsymbol{s}\to \mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{s})}{\boldsymbol{s}} = \frac{|\boldsymbol{\Omega}| - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{b}}{\int_\Omega \boldsymbol{m}} > \mathbf{0} \quad (\Longrightarrow \text{ 正値解 } (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u}) \text{ の一意性 !})$$

unstable であることは横断条件による．$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v})$ における線形化固有値問題

$$-\Delta\Psi = \lambda m\Psi - 2v\Psi + \xi(\lambda)\Psi \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 2bv\Psi + \xi(\lambda)\Psi \quad \text{on } \partial\Omega$$

$$\Longrightarrow \qquad \xi'(0) = \frac{\lambda'(0)\int_\Omega m}{|\Omega| + |\partial\Omega|} < 0.$$

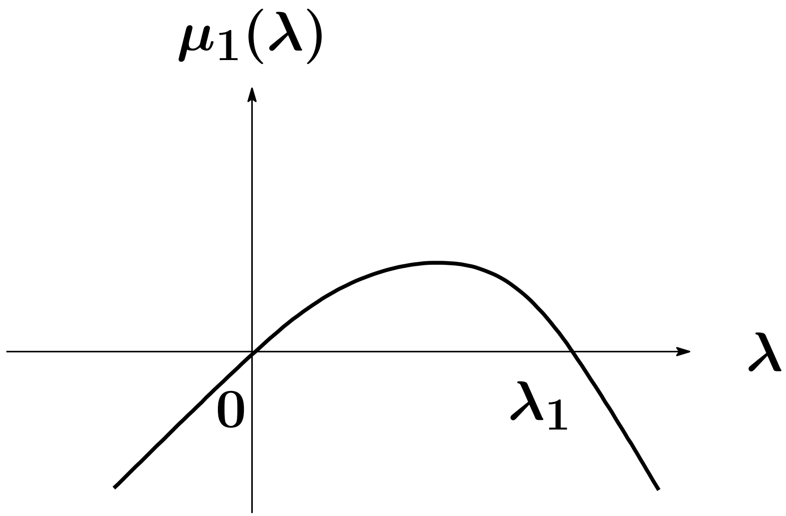
$$\therefore \ \xi_1(\lambda(s)) < 0 \quad (s > 0,\ s \sim 0).$$

実際，$(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{0})$ における線形化固有値問題

$$-\Delta\Phi = \lambda m\Phi + \mu(\lambda)\Phi \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

より，最小固有値 $\boldsymbol{\mu_1(\lambda)}$ は次の条件をみたす：

$$\mu'(0) = -\frac{\int_\Omega m}{|\Omega|} > 0 \quad \textbf{（横断条件）}$$



$\int_\Omega m < 0$

$\mu_1'(0) > 0$ 横断条件

主定理 2 (i) の証明の概略　$\int_{\partial\Omega} b = |\Omega|$ の場合は (i) と同様.

$\int_{\partial\Omega} b < |\Omega|$ の場合は,

$$(\lambda_j, u_j) \in \mathcal{C}_0,\ \lambda_j \to +0 \implies v_j = \lambda_j u_j \longrightarrow \exists v_0 \ \text{ in } C(\overline{\Omega}),$$

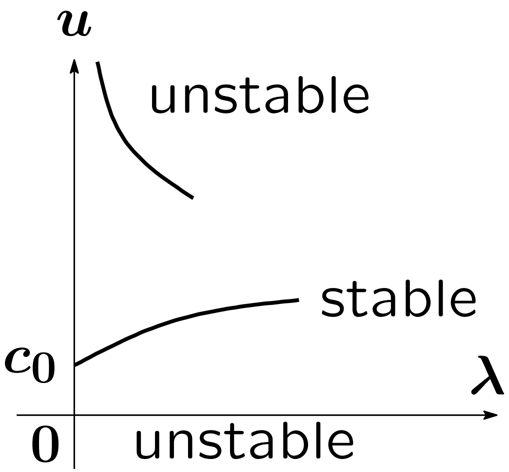
v_0 は $-\Delta v_0 = -v_0^2$ in Ω, $\dfrac{\partial v_0}{\partial n} = b v_0^2$ on $\partial\Omega$ の正値解. これより,

$$u_{\lambda_j} \sim \frac{1}{\lambda_j}.$$

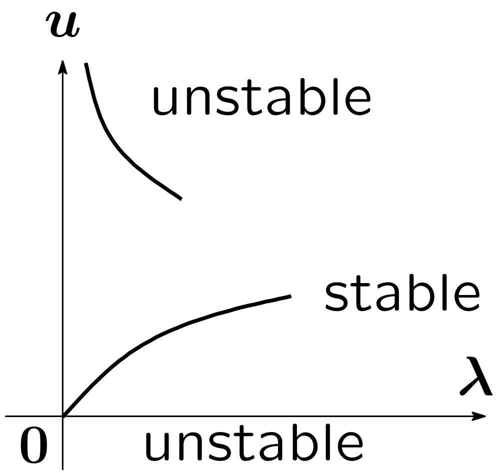
$(\lambda, u) \in \mathcal{C}_0$, $\lambda > 0, \lambda \sim 0$ が unstable であることは, v_0 が unstable であることから従う.

注意: $\int_\Omega m \geq 0$ の場合，$N = 2, 3$， $b > 0$ のもとで，

(I) $|\Omega| > \int_{\partial\Omega} b$ ならば，



$\int_\Omega m > 0$



$\int_\Omega m = 0$

$$c_0 = \frac{\int_\Omega m}{|\Omega| - \int_{\partial\Omega} b}$$

(II) $|\Omega| \leq \int_{\partial\Omega} b$ ならば $\lambda > 0$，$\lambda \sim 0$ において正値解を持たない（非存在）．

$1 < q < q_0(N)$ の場合の a *priori* bounds の証明　$\beta > 0$, $\lambda \in (0, \beta]$.

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_\Omega m u^2 dx - \lambda \int_\Omega u^3 dx + \lambda \int_{\partial\Omega} b u^{q+1} ds. \quad (1)$$

Filo and Kačur inequality (1995) を用いる: $\varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$\int_{\partial\Omega} |u|^{q+1} ds \le \varepsilon \|u\|_{1,2}^2 + C_\varepsilon \left(\int_\Omega |u|^{q+1} dx \right)^r, \quad \forall u \in W^{1,2}(\Omega), \quad (2)$$

ただし，$1 < q < \frac{N+1}{N-1}$ and $r > \frac{N-q(N-2)}{N+1-q(N-1)}$. (1) と (2) から

$$\|u\|_{1,2}^2 \le C \int_\Omega u^2 dx + \lambda \left\{ C \left(\int_\Omega u^3 dx \right)^{\boxed{\frac{(q+1)r}{3}}} - \int_\Omega u^3 dx \right\}. \quad (3)$$

$$\frac{(q+1)r}{3} < 1 \implies \|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \le C\left(1 + \int_\Omega u^2 dx\right) \tag{4}$$

一方,

$$\int_\Omega u^2 dx = \int_\Omega mu dx + \int_{\partial\Omega} bu^q ds, \quad 1 < q < 2 \tag{5}$$

に Hölder の不等式を適用して,

$$\int_\Omega u^2 dx \le C\left\{\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\partial\Omega} u^2 ds\right)^{\frac{q}{2}}\right\} \tag{6}$$

$W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$, すなわち,

$\int_{\partial\Omega} u^2 ds \le C\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}, \forall u \in W^{1,2}(\Omega)$ を (6) へ代入すると,

$$\int_\Omega u^2 dx \le C\left\{\left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(1 + \int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{q}{2}}\right\}. \tag{7}$$

大域的分解解の存在:

$$
\begin{aligned}
u &= \mathcal{K}_\Omega((\lambda m + M)u) + \mathcal{B}(\lambda, u), \\
\mathcal{B}(\lambda, u) &= -\mathcal{K}_\Omega(u^2) + \mathcal{K}_{\partial\Omega}(\lambda b u^q),
\end{aligned}
$$

定数 $M > 0$:

$$
v = K_\Omega w \iff \begin{cases} (-\Delta + M)v = w & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}
$$

$$
v = K_{\partial\Omega} \psi \iff \begin{cases} (-\Delta + M)v = 0 & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = \psi & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

$\mathcal{L}(\lambda) \colon C(\overline{\Omega}) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$,

$$
\mathcal{L}(\lambda)u := u - \mathcal{K}_\Omega((\lambda m + M)u) \implies \mathcal{L}(\lambda)u + \mathcal{B}(\lambda, u) = 0 \quad \text{in } C(\overline{\Omega})
$$

$$\mathcal{L}(\lambda)u := u - \mathcal{K}_\Omega((\lambda m + M)u)$$

は次の 2 つの条件をみたす：

$$\dim N[\mathcal{L}(\lambda_1)] = 1,$$

$$\mathcal{L}'(\lambda_1)(N[\mathcal{L}(\lambda_1)]) \oplus R[\mathcal{L}(\lambda_1)] = C(\overline{\Omega}).$$

López-Gómez (2001) の unilateral global bifurcation theory により，$(\lambda_1, 0)$ から分岐する components $\mathcal{C}_+, \mathcal{C}_-$ が存在して，次のどれかをみたす：

(i) **unbounded**

(ii) $\exists \lambda^* \in \Sigma \setminus \{\lambda_1\}$ s.t. $(\lambda^*, 0) \in \mathcal{C}_+$ $(\mathcal{C}_-)$, or

(iii) contains a point $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times (Y \setminus \{0\})$,

where Y is the complement of $N[\mathcal{L}(\lambda_1)]$.

ありがとうございました．