[1] 次の１階線形方程式の一般解を求めよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} - xy = x, \quad y = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + e^x y = 3e^x, \quad y = 3 + Ce^{-e^x}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x+1} = \sin x, \quad y = \dfrac{-x\cos x + \sin x - \cos x + C}{x+1}$

(4) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}, \quad \dfrac{x^2 e^{-x^2}}{2} + Ce^{-x^2}$

(5) $(x^2-1)\dfrac{dy}{dx} + 2xy - \cos x = 0, \quad y = \dfrac{\sin x + C}{x^2-1}$

(6) $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x + 3\cos 2x, \quad \dfrac{\sin x}{2} - \dfrac{\cos x}{2} + \dfrac{3}{5}\cos 2x + \dfrac{6}{5}\sin 2x + Ce^{-x}$

(7) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x, \quad y = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{C}{x}$

[2] 次のベルヌーイ型を変数変換により１階線形方程式にせよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{y^2}{x^2}, \quad \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{z}{x} = -\dfrac{1}{x^2}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^3, \quad \dfrac{dz}{dx} - 2z = -2x$

(3) $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^{-1}y^{-2}, \quad \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{3}{x}z = \dfrac{3}{x^2}$

[3] 次のリカッチ型について，カッコ内の関数が特殊解であることを既知としてベルヌーイ型に変形せよ．さらに１階線形方程式に変形せよ．

(1) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y^2 - y - 2x^2 = 0 \quad (y = x), \quad \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{4x-1}{x}z = -\dfrac{2}{x}z^2, \quad \dfrac{dw}{dx} - \dfrac{4x-1}{x}w = \dfrac{2}{x}$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x}y^2 + \dfrac{y}{x} + x \quad (y = x), \quad \dfrac{dz}{dx} + (2 - \dfrac{1}{x})z = -\dfrac{z^2}{x}, \quad \dfrac{dw}{dx} + (\dfrac{1}{x} - 2)w = \dfrac{1}{x}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ について，実数 a を適当に取って $y = \dfrac{a}{x}$ が特殊解となるようにせよ．さらにベルヌーイ型，１階線形方程式に変形せよ．

$\dfrac{dz}{dx} - \dfrac{2}{x}z = z^2, \quad \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{2}{x}w = -1$

課題：問 [2], [3] において，変形した１階線形方程式を解いて一般解を求めよ．