2003.10.20

線形代数 II 関係資料（行列の基本変形について）

(I) 基本変形とは

行列の基本変形では，行列に対して３種類の $\boxed{\text{行基本変形}}$ と $\boxed{\text{列交換}}$ を連続的に行って，いわゆる $\boxed{\text{標準形}}$ に変形することを目的とする．

(II) 行基本変形と列交換

行列に対する次の３つの変形を総称して $\boxed{\text{行基本変形}}$ という．

(1) ある行のすべての成分を c 倍する．ただし，$c \neq 0$.

(2) ある行と別の行を入れ替える．

(3) ある行に別の行の c 倍を加える．

列について同様に列基本変形を３種類考えることができるが，ここでは $\boxed{\text{列交換のみ}}$ を考える：

(4) ある列と別の列を入れ替える．

例を挙げると以下のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -8 & -10 & -12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{2 行を } (-2) \text{ 倍する}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{2 行と 3 行を入れ替える}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 14 & 18 \end{pmatrix} \qquad \text{3 行に 1 行の 3 倍を加える}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{1 列と 2 列を入れ替える}$$

(III) 標準形

次のように $\boxed{\text{小行列に分解}}$ したときに，

$$\begin{pmatrix} E_r & B \\ O & O \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_r & B \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}$$

の３つの行列を $\boxed{\text{標準形}}$[1] と呼ぶ．ただし，E_r は小単位行列[2]，O は小零行列[3]．そして B はどのようであっても良い．すべての行列に対して次の結果が成立する．

Theorem 1 (計算問題中心の線形代数学，米田二良著，学術図書；定理-定義 1.12, p. 17). どんな行列も適当に行基本変形と列交換を繰り返し行うと，単位行列，またはうえの３つの標準形のいずれかに変形できる．

(IV) 変形の手順に関する注意

1. 変形は教科書第 1 章 1.3 節（pp. 17–19）に従う． 簡単に言うと，行基本変形で変形できるところまで変形を行い，それができないときは列交換を行う．第一列（縦）から順に二列，三列と変形を行う．
2. 標準形とは，もうそれ以上行変形と列交換で変形することができない $\boxed{\text{最終的な (究極の)}}$ 行列である．

[1]テキストの中に現れる標準形の定義とは異なるので注意せよ (系-定義 1.13, p. 20 を参照).
[2]つまり，単位行列.
[3]そのパートの成分はすべて零.