基本的な関数の話

梅津健一郎

平成 19 年 6 月 14 日

はじめに

ベキ関数 x^n を除く基本的な関数の解説を行います．問題の解答を巻末に載せました．解答は未完成です．かなり無理な言い回しをしているところがあるので不明な点は質問に来てください．随時修正版をアップします．表紙の日付がバージョンを表します．

梅津健一郎

前橋工科大学総合デザイン工学科

目 次

第1章　基本的な関数

1.1　分数関数

定数 p, q, r, s に対して

$$y = \frac{px+q}{rx+s}$$

を**１次分数関数**という．単に分数関数とも言う．ここでは関数の基本的な扱いを通して分数関数を理解する．なお，次の例のように定数に帰着されるものは始めに除外する：

$$y = \frac{4x+2}{2x+1} = 2 \quad (x \neq -1/2).$$

1.1.1　関数の平行移動

関数 $y = f(x)$ に対して

$$y - b = f(x-a)$$

によって定義される x の関数 y のグラフは，元の関数のグラフを x 方向に a, y 方向に b, **平行移動**したものである．

● 問題 **1.1.1**　$y = x^2$ を x 方向に 3, y 方向に -2, 平行移動した関数は

$$y = x^2 - 6x + 7$$

であることを示せ．

● 問題 **1.1.2**　問 1.1.1 の関数について，グラフを描くことによって平行移動の様子を見よ．

関数

$$y = \frac{\alpha}{x} \quad (\alpha \neq 0 \text{ は定数})$$

のグラフは**双曲線**と呼ばれる．

● 問題 **1.1.3**　この関数のグラフを描け．

例 1.1.1 関数の平行移動を用いて次の分数関数のグラフを描く．割り算をして，

$$y = \frac{4x+1}{x-3} = \frac{4(x-3)+12+1}{x-3} = 4 + \frac{13}{x-3}$$

ゆえに,

$$y-4=\frac{13}{x-3}.$$

これは $y=\frac{13}{x}$ を x 方向に 3, y 方向に 4, 平行移動したものである.

- 問題 **1.1.4**　実際にグラフにせよ.
- 問題 **1.1.5**　次の関数のグラフを描け.

$$y=\frac{5-6x}{3x+1}$$

1.1.2　関数の拡大縮小と反転

双曲線 $y=\frac{1}{x}$ と $y=\frac{\alpha}{x}$ $(\alpha>0)$ の関係を見る. 正の定数 a,b, 関数 $y=f(x)$ に対して,

$$\frac{y}{b}=f\left(\frac{x}{a}\right)$$

で定義される x の関数 y のグラフは, 元の関数 $y=f(x)$ のグラフを y 軸を対称軸として x 方向に a 倍, x 軸を対称軸として y 方向に b 倍, **拡大縮小**したものである. 例として

例 1.1.2 $y=x^2$ のグラフを x 方向に 4 倍した関数は

$$y=\frac{1}{16}x^2$$

である[1]. 実際, $y=\frac{x^2}{16}=(\frac{x}{4})^2$ であるから.

- 問題 **1.1.6**　$y=x^2$ と $y=\frac{x^2}{16}$ のグラフを描いて拡大の様子を確かめよ.
- 問題 **1.1.7**　$y=x^2$ を y 方向に 3 倍した関数を求めよ. 両方のグラフを描くことによって拡大の様子を確かめよ.
- 問題 **1.1.8**　関数 $y=x^3$ について, x 方向に 2 倍した関数と同じ関数は $y=x^3$ を y 方向に何倍すれば得られるか述べよ.

例 1.1.3 関数

$$y=\frac{6x+1}{2x-1}$$

を考える. 割り算により

$$y=\frac{6x+1}{2x-1}=3+\frac{2}{x-\frac{1}{2}}.$$

この関数のグラフは $y=\frac{1}{x}$ を出発点として次ぎのように理解される. y 方向に 2 倍すると $\frac{y}{2}=\frac{1}{x}$, つまり $y=\frac{2}{x}$. さらに, x 方向に 3, y 方向に $\frac{1}{2}$, 平行移動すると $y-3=\frac{2}{x-\frac{1}{2}}$ を得る.

[1] 対称軸の記述は文脈から略す.

• 問題 **1.1.9**　説明に従ってグラフを描け．

• 問題 **1.1.10**　関数の平行移動，拡大縮小を用いて，次の関数を $y=\frac{1}{x}$ のグラフからできるだけ正確に描け．
(1)　$y=\dfrac{4}{x}$　(2) $y=\dfrac{2}{x-1}$　(3) $y=\dfrac{4x-2}{2x-4}$

さて，拡大縮小において，a, b が負のときは元の関数をどのように変換しているのであろうか．

例 1.1.4 元の関数を $y=x^2$ とするとき，$y=-x^2$ は

$$\frac{y}{-1}=x^2$$

と書ける $(b=-1)$．元の関数を $y=x^3$ とするとき，$y=-x^3$ は

$$y=\left(\frac{x}{-1}\right)^3,\quad \text{または}\quad \frac{y}{-1}=x^3$$

と書ける $(a=-1,$ または $b=-1)$．

一般に関数 $y=f(x)$ に対して，

$$\frac{y}{-1}=f(x)$$

のグラフは元の関数のグラフを x 軸に関して対称に移す（y 方向に**反転**）．同様に

$$y=f\left(\frac{x}{-1}\right)$$

のグラフは元の関数のグラフを y 軸に関して対称に移す (x 方向に反転).

• 問題 **1.1.11**　グラフを描くことで，例 1.1.4 の反転の様子を確かめよ．

拡大縮小と反転を組み合わせると，$y=f(x)$ に対して，

$$\frac{y}{-3}=f(x)$$

は，$y=f(x)$ を x 軸に関して対称に移し $\frac{y}{-1}=f(x)$, すなわち $y=-f(x)$. 続けて，x 軸を対称軸に y 方向に 3 倍すると $\frac{y}{3}=-f(x)$, つまり $\frac{y}{-3}=f(x)$ が得られる（反転して拡大）．

例 1.1.5 関数

$$y=\frac{-2x-1}{x-1}$$

を考える．割り算により，

$$y=\frac{-2x-1}{x-1}=-2+\frac{-3}{x-1}$$

したがって，この関数のグラフは $y=\frac{1}{x}$ を出発点として次のように理解される．$y=\frac{1}{x}$ を x 軸に関して対称に移すと，$\frac{y}{-1}=\frac{1}{x}$, つまり $y=\frac{-1}{x}$. さらに，y 方向に 3 倍すると，$\frac{y}{3}=\frac{-1}{x}$, つまり $y=\frac{-3}{x}$. さらに x 方向に 1, y 方向に -2 平行移動すると $y+2=\frac{-3}{x-1}$, つまり $y=-2+\frac{-3}{x-1}$ を得る．

• 問題 **1.1.12**　実際に説明に従ってグラフを描け．

1.2　円の方程式

$r>0$ を定数として，

$$x^2+y^2=r^2$$

を**円の方程式**という．この方程式をみたす x,y は三平方の定理に基づき $x-y$ 座標平面において原点中心，半径 r の円弧を描く．

• 問題 **1.2.13**　次の方程式をみたす x,y を関数の平行移動，拡大縮小にしたがって $x-y$ 平面に図示せよ[2]．

(1) $x^2+y^2=15$　(2) $(x-3)^2+(y+4)^2=4$　(3) $2x^2+4y^2=8$
(4) $x^2+y^2-8x+4y+19=0$　(5) $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$

1.3　無理関数

非負関数 $f(x)$ に対して

$$y=\sqrt{f(x)}$$

を**無理関数**という．特に $f(x)=x$ $(x\geq 0)$ のとき，

$$y=\sqrt{x}\quad (x\geq 0) \iff x=y^2\quad (y\geq 0)$$

で与えられる．

• 問題 **1.3.14**　$x=y^2$ $(y\geq 0)$ のグラフから $y=\sqrt{x}$ $(x\geq 0)$ のグラフを描け．

• 問題 **1.3.15**　関数の平行移動，拡大縮小，反転を利用して，次の関数のグラフを描け．

(1) $y=-\sqrt{x}$　(2) $y=\sqrt{-x}$　(3) $y=\sqrt{3x}$　(4) $y=\sqrt{-2x}$　(5) $y=-\sqrt{-x}$
(6) $y=\sqrt{x-4}$　(7) $y=-\sqrt{3-x}$　(8) $y=1-\sqrt{1+2x}$

同様にして $y=\sqrt[n]{x}$ も次のように定義される．

$$y=\sqrt[n]{x}\quad (x\geq 0) \iff x=y^n\quad (y\geq 0)$$

[2] (3), (5) は**楕円の方程式**と呼ばれる．

1.4 指数関数

$a > 1$ または $0 < a < 1$ のとき，指数関数 a^x を定義する．

1.4.1 実数の構成

準備として，実数の構成について述べる．実数の全体を $\boldsymbol{R}$ で表し，数直線と同一視する．$\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{自然数全体}$$

$$\boldsymbol{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\} \quad \text{整数全体}$$

$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{q}{p} : p, q \in \boldsymbol{Z},\ p \neq 0\right\} \quad \text{有理数全体}$$

$$\boldsymbol{R} \quad \text{実数全体}$$

の順に構成される．$\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}$ にはなく，$\boldsymbol{Q}$ がもつ性質として**稠密性**がある．すなわち，

勝手な有理数 x, y に対して，$x < q < y$ をみたす有理数 q が必ず存在する

稠密性により $\boldsymbol{Q}$ は数直線上をほとんど隙間無く埋められている．言い換えると，有理数の世界には隣の数というものがない．$\boldsymbol{Q}$ が稠密性をもつことはつぎのようにしてわかる．$x = \frac{q_1}{p_1} < y = \frac{q_2}{p_2}$ とする．x, y の中点 z は $z = \frac{x+y}{2}$ で与えられ，$x < z < y$ をみたす．さらに

$$z = \frac{x+y}{2} = \frac{p_2 q_1 + p_1 q_2}{2 p_1 p_2}$$

より，$p_2 q_1 + p_1 q_2$ も $2 p_1 p_2$ も整数であるから z は有理数である．よって示せた．稠密性により，いくらでも近い有理数を取ることができる．

- **問題 1.4.16** $a = \frac{1}{2}$ とする．有理数列 a_n で $a_n \to a$ となるものを具体的に作れ．
- **問題 1.4.17** $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}$ は稠密性をもたないことを示せ．

微積分の基本公理として**実数の連続性**がある：

上に (下に) 有界な増加 (減少) 数列 x_n は常に極限値 $\lim_{n \to \infty} x_n$ をもつ

微分積分学では，一見当たり前であるが，

実数全体を表す数直線はこの公理をみたすことを前提とする

$\boldsymbol{R}$ に属していて，$\boldsymbol{Q}$ に属さない数のことを無理数という．例えば，$\sqrt{2}, \pi$ は無理数である．

• 問題 **1.4.18**　$\sqrt{2}$ が有理数でないことを示せ．

無理数全体は $\boldsymbol{P}$ で表す．すなわち $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{P}$. $\boldsymbol{Q}$ の稠密性と実数の連続性公理と合わせて，無理数は次のように理解される．

上に有界な増加有理数列の極限値として無理数は与えられる

1.4.2　指数関数の定義

実数の構成に従って x を取り a^x を定義する．

(1) x が自然数のとき，$x = n = 1, 2, \cdots$.

$$a^n := a \cdots a \quad a \text{ の } n \text{ 個の積}$$

このとき 次の**指数法則**が成立する．

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
$$(a^n)^m = a^{nm}$$
$$(ab)^n = a^n \cdot a^m$$

次の問題を考える：

指数法則がすべての実数 x について成立するように a^x を定義せよ．

(2) $x = 0$ のとき．$a^0 := 1$ と定義．こうすると，$a^1 a^0 = a^{1+0} = a^1$ が成り立つ．

(3) $x = -n$ (負の整数) のとき．$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ と定義．こうすると，$a^n a^{-n} = a^0 = 1$ が成り立つ．

(4) $x = \frac{m}{n}$ (有理数) のとき．

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a} \quad (a \text{ の } n \text{ 乗根})$$
$$a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m} \quad (a^m \text{ の } n \text{ 乗根})$$

と定義．こうすると，$(a^{1/n})^n = a^1 = a$, $(a^{m/n})^n = a^m$ が成り立つ．以上の定義によりすべての有理数に対して指数法則が成り立つことが示される．例えば，

例 1.4.1 m, n を自然数とする．$(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$ を示す．右辺について $x = a^{1/n}$ とおくと $x^n = a$. 両辺 m 乗すると $x^{nm} = a^m$. 自然数における指数法則から $(x^m)^n = a^m$. よって $x^m = (a^m)^{1/n}$. これは $(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ である．

● 問題 **1.4.19** m_1, m_2, n_1, n_2 は自然数とする．$p = \frac{m_1}{n_1}, q = \frac{m_2}{n_2}$ に対して $a^p a^q = a^{p+q}$ を示せ．

最後に無理数まで含めた実数全体で定義する．

(5) x が無理数のとき．増加有理数列 $q_n \leqq q_{n+1}$ があって，$\lim_{n\to\infty} q_n = x$ とできる．このとき，次のことを検証する．

補題 1.4.1 $a > 1$ ならば $a^{q_1} \leqq a^{q_2}$.

証明 指数法則から $a^{q_2} = a^{q_1} a^{q_2 - q_1}$. $a > 1$ なので $a^{q_2 - q_1} > 1$. なぜなら $\frac{m}{n} = q_2 - q_1 > 0$ とおいて $x = a^{q_2 - q_1} = a^{m/n}$ とすると，$x^n = a^m > 1$. $y = x^n$ のグラフを考えると $x > 1$ でなければならない．よって $a^{q_2} = a^{q_1} a^{q_2 - q_1} \geq a^{q_1}$. ■

補題 1.4.1 と同様に，一般に $a > 1$ ならば $\{a^{q_n}\}$ は単調増加列になる．逆に $0 < a < 1$ ならば $\{a^{q_n}\}$ は単調減少列になる（単調性）．さらに

$$q_n \leqq x \leqq m$$

をみたす自然数があるので，再び単調性を用いて，

$$\begin{aligned} a^{q_n} &\leqq a^m \quad (a > 1) \\ a^{q_n} &\geq a^m \quad (0 < a < 1) \end{aligned}$$

が従う．以上から

$$\begin{aligned} a > 1 \quad &\Longrightarrow \ a^{q_n} \text{ は単調増加かつ上に有界} \\ 0 < a < 1 \quad &\Longrightarrow \ a^{q_n} \text{ は単調減少かつ下に有界} \end{aligned}$$

実数の連続性より $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$ が存在するので

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$$

によって無理数 x に対して a^x を定義する．このとき，q_n の選び方寄らず $\lim\limits_{n\to\infty} a^{q_n}$ はただ一つに決まることが知られている..

以上の定義によって，すべての実数 x に対して指数法則が成立することが証明できる．

● 問題 **1.4.20**　$a^x a^y = a^{x+y}$ が，有理数までの x について指数法則が成り立つと仮定して，実数 x, y で成立することを示せ．

最後に，指数関数 $y = a^x$ の性質をまとめておく．

命題 1.4.1 (指数関数の性質) 指数関数 $y = a^x$ は次の性質をもつ：

(1) 定義域は実数全体 $\boldsymbol{R}$, 値域は $y > 0$.

(2) $a^0 = 1$ で、$0 < a < 1$ ならば増加関数、$a > 1$ ならば減少関数。

(3) $0 < a < 1$ のとき、$x \to \infty$ ならば 0 に収束、$x \to -\infty$ ならば ∞ に発散。一方、$a > 1$ のとき、$x \to \infty$ ならば ∞ に発散、$x \to -\infty$ ならば 0 に収束。

(4) $a > 1$ のとき、$x \to \infty$ ならば a^x はどの x^n $(n = 1, 2, 3 \cdots)$ よりも速く増大する。すなわち、

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^n} = \infty.$$

が成り立つ．

● 問題 **1.4.21**　$y = a^x$ を a で場合分けしてグラフにせよ．

1.5　対数関数

$a > 1$ または $0 < a < 1$ のとき，対数関数 $\log_a x$ を定義する．

1.5.1　関数の逆関数

対数関数の定義のために逆関数について述べる．実数における**区間**には次の 3 種類がある。

$$[a, b] := \{x \in \boldsymbol{R} : a \leqq x \leqq b\} \quad \text{閉区間}$$
$$(a, b) := \{x \in \boldsymbol{R} : a < x < b\} \quad \text{開区間}$$
$$(a, b] := \{x \in \boldsymbol{R} : a < x \leqq b\} \quad \text{半開区間}$$

区間の端が開いているものは $\pm\infty$ の場合を含む。$x \in [2, \infty)$ とは $x \geq 2$ を意味する．ある区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ が**狭義単調増加**とは

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

をみたすときをいう（同様にして**狭義単調減少**も定義される）．

例 1.5.1 a^x は全区間 $(-\infty, \infty)$ で狭義単調増加 $(a > 1)$, 狭義単調減少 $(0 < a < 1)$ である.

例 1.5.2 x^2 は $\boldsymbol{R}$ では狭義単調ではない.

区間 I で定義された狭義単調増加（減少）関数 $y = f(x)$ において，値域の元 y に対して <u>ただひとつ</u> x が対応する（**逆対応**）．これを $x = f^{-1}(y)$ と表す．このとき，x と y を入れ替えて $y = f^{-1}(x)$ を f の**逆関数**という。逆関数の性質をまとめると

命題 1.5.1 (1) 逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域、値域は f の定義域。

(2) $y = f(x)$ のグラフと $y = f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y = x$ に関して対称。

• 問題 **1.5.22**　上の命題の (2) を示せ.

• 問題 **1.5.23**　次の関数の逆関数を求め、グラフにせよ。
(1) $y = \dfrac{x}{2} + 1$　(2) $y = x^2 \quad (x \geq 0)$　(3) $y = x^2 \quad (x \leqq 0)$　(4) $y = -1 + \dfrac{1}{x-2} \quad (x < 2)$

1.5.2　対数関数の定義

指数関数 $y = a^x$ は実数全体 $\boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$ で狭義単調関数である。対数関数

$$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

は指数関数 $y = a^x$ の逆関数として定義される．a を**底**といい，x を**真数**という．指数関数と対数関数の関係を言うと

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

である．$a = e$ (ネイピア数) のとき，$y = \log x$ として底を略す.

対数関数のグラフは逆関数の性質から $y = a^x$ のグラフを $y = x$ に関して対称にうつしたグラフとして求められる.

命題 1.5.2 (対数関数の性質) $y = \log_a x$ について，(1) 定義域は $x > 0$, 値域は $\boldsymbol{R}$.
(2) $\log_a 1 = 0$ で、$0 < a < 1$ ならば狭義単調減少、$a > 1$ ならば狭義単調増加。
(3) $0 < a < 1$ のとき、$x \to \infty$ ならば $-\infty$ に発散し、$x \to 0$ ならば ∞ に発散する。$a > 1$ のときはその逆。
(4) $a > 1$ のとき、$x \to \infty$ ならば $\log_a x$ はどの x^n よりも緩く増大する．すなわち

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0$$

が成立する.

●問題 **1.5.24**　$y=\log_a x$ のグラフを a で場合分けして描け．

●問題 **1.5.25**　値を求めよ．

(1) $\log_a a$　(2) $\log_3 81$　(3) $\log_8 2$　(4) $\log_2 32$　(5) $\log_{1/4} 16$

指数法則を対数関数に対して読み替えたものが対数法則である．

命題 1.5.3 (対数法則)　正数 M, N に対して，(1) $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

(2) $\log_a M-\log_a N=\log_a M/N$

(3) $\log_a M^\sigma=\sigma\log_a M$

(4) $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$　(底の変換)

証明　(1) を示す．$\alpha=\log_a M$, $\beta=\log_a N$ とおく．$M=a^\alpha$, $N=a^\beta$. 指数法則から $MN=a^{\alpha+\beta}$. よって $\alpha+\beta=\log_a MN$. (2) は (1) に同様．(3) を示す．$\alpha=\log_a M$ とおく．$M=a^\alpha$. $M^\sigma=(a^\alpha)^\sigma=a^{\alpha\sigma}$. ゆえに $\alpha\sigma=\log_a M^\sigma$. ■

●問題 **1.5.26**　(4) を示せ．

1.5.3　対数関数の応用

大きい自然数の桁数を対数を用いて求めることを行う．一般に

$$12300=1.23\cdot 10^4$$

にみられるように，自然数 n に対して

$$n=a\cdot 10^m\quad (1\leqq a<10,\ m=0,1,2,\cdots)$$

と変形したとき，n の**桁数**は $m+1$ である．両辺 $\log_{10}$ を取ると，対数法則により

$$\log_{10} n=(\log_{10} a)+m.$$

$y=\log_{10} x$ の単調増加性から $1\leqq a<10$ より $0\leqq\log_{10} a<1$ である．よって

$$m\leqq\log_{10} n<m+1$$

を得る．したがって，桁数 $m+1$ は

$$\log_{10} n \text{ の値を超える最小の自然数}$$

で与えられることがわかる．

●問題 **1.5.27**　ここでは $\log_{10} 2=0.3$, $\log_{10} 3=0.48$, $\log_{10} 7=0.845$ とせよ．

1. 次の自然数の桁数を求めよ．(1) 2^{32}　(2) 3^{20}　(3) 7^{145}　(4) 12^{51}
2. 3^{20} と 2^{28} はどちらが大きい数か．

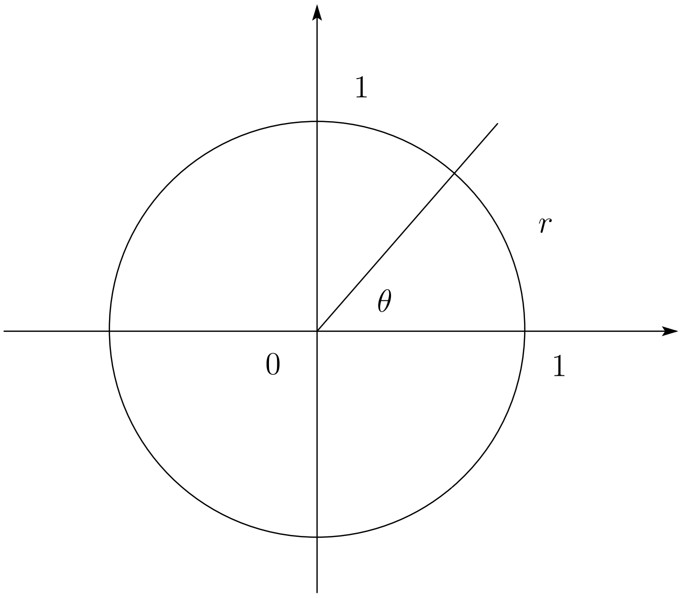
1.6 三角関数

三角関数 $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ を定義する．

1.6.1 弧度法

角度 θ の表記について述べる．

半径 1 の円弧の長さ 2π を 360° に対応させる．一般に，図の扇形の孤の長さ r をその角度 θ に対応させる．



r と θ の間には次の関係がある．

$$r = \frac{\theta}{360} \times 2\pi \quad \textbf{弧度法}$$

単位は**ラジアン**というが通常は単位は略す．例えば半円の弧の長さは π であるので

$$180^{\circ} = \pi$$

である．P$(1,0)$ から出発して反時計回りに孤を取るとき，対応する角度 θ を正と定め，時計回りに孤を取るとき負と定める．弧の長さで角度を測るので 2π (360°) より大きい角度がある（円を反時計回りに 2 周すると孤の長さは 4π. したがって，$720^{\circ} = 4\pi$）．

● 問題 **1.6.28**　次の角度を弧度法で表せ．

$15^o, 30^o, 45^o, 60^o, 80^o, 90^o, 125^o, 220^o, 350^o, 420^o, 1050^o, -70^o$

1.6.2 三角関数の定義

原点 $(0,0)$ から半径 r の円周上の点 (x,y) への半直線と，x の正軸とのなす角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ に対して (x の正軸から反時計回りになす角 θ に対して),

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

で三角関数を定義する．三角関数の値は x, y の符号により正負の両方を取ることに注意する．さらに，$\theta \geq 2\pi$ に対して，θ を 2π で割ったときの余りが α ならば，角度 α における値を θ における三角関数の値と定義する．

例 1.6.1

$$\cos\frac{9}{4}\pi = \cos\frac{\pi}{4}$$
$$\sin 15\pi = \sin\pi$$
$$\tan\frac{322\pi}{3} = \tan\frac{4}{3}\pi$$

さらに，$\theta < 0$ (負の角度) については，x の正軸から時計回りになす角として考える．

例 1.6.2

$$\cos(-\frac{1}{4}\pi) = \cos\frac{7}{4}\pi$$
$$\sin(-7\pi) = \sin\pi$$
$$\tan(-\frac{10\pi}{3}) = \tan\frac{2}{3}\pi$$

● 問題 **1.6.29** 1. 次の値を求めよ．
(1) $\cos\frac{\pi}{3}$ (2) $\sin\frac{3\pi}{2}$ (3) $\tan(-\frac{5\pi}{4})$ (4) $\cos\frac{8\pi}{3}$ (5) $\sin(-\frac{13\pi}{4})$ (6) $\tan 25\pi$

2. (1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $3\pi < x \leqq 5\pi$ をみたす x を求めよ．
(2) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ をみたす x を求めよ．

三角関数の性質を述べる．

命題 1.6.1 (1) (**周期性**) $\cos\theta$ と $\sin\theta$ は 2π の周期をもつ：

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

一方，$\tan\theta$ は π の周期をもつ

$$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$$

(2) (**偶性奇性**) $\cos\theta$ は $\cos(-\theta)=\cos\theta$ をみたす．一般に関数 f が $f(-x)=f(x)$ をみたすとき，**偶関数**であるという．一方，$f(-x)=-f(x)$ をみたすとき，**奇関数**であるという．$\sin\theta, \tan\theta$ は奇関数である．

(3) (**恒等式**) 三角関数の間には次の恒等式がある．

$$\begin{aligned}&\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\&\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

証明　$\cos\theta, \sin\theta$ の周期性は定義から明らかである．

$\cos\theta$ が偶関数であることは次のようにわかる．θ のときの半直線と円周の交点を (x,y) とすると，定義から

$$\cos\theta=\frac{x}{r}.$$

$-\theta$ で決まる半直線は θ の場合のそれに x 軸に関して対称であるから，円周との交点は $(x,-y)$ である．特に x は不変．よって

$$\cos(-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta.$$

恒等式 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ であることは次のようにわかる．定義より

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=(\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=\frac{x^2+y^2}{r^2}.$$

(x,y) は原点中心，半径 r の円周上の点だから $x^2+y^2=r^2$．よって右辺は 1 である．■

• 問題 **1.6.30**　$\tan\theta$ が π の周期性をもつことを説明せよ．

• 問題 **1.6.31**　$\sin\theta, \tan\theta$ が奇関数であることを示せ．

• 問題 **1.6.32**　残りの 2 つの恒等式を定義から導け．

• 問題 **1.6.33**　3 つの三角関数のグラフをそれぞれ描け．

• 問題 **1.6.34**　(1) 3 つの三角関数の定義域と値域を求めよ．
(2) $\sin(2\theta-\frac{\pi}{2})$ のグラフを描け．さらに値域を求めよ．
(3) 次の不等式を解け．
(i) $\sin\theta>1/\sqrt{2},\quad 0<\theta<\pi$
(ii) $\cos\theta>-\sqrt{3}/2,\quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi$

さて，次の 4 つの分配則を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の**加法定理**という．

定理 1.6.1 任意の α, β に対して，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

証明 実際，

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \tag{1.6.1}$$

を示せば，残りの 3 つは得られる．特に β を $-\beta$ に置き換えると，

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta).$$

$\sin\theta$ は奇関数で，$\cos\theta$ は偶関数だから

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

次に，$\alpha = \theta$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ とおくと，$\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ だから，

$$\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta.$$

ここで，θ を $-\theta$ で置き換えると，奇関数，偶関数の性質から

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta.$$

この 2 つの関係式を用いると，

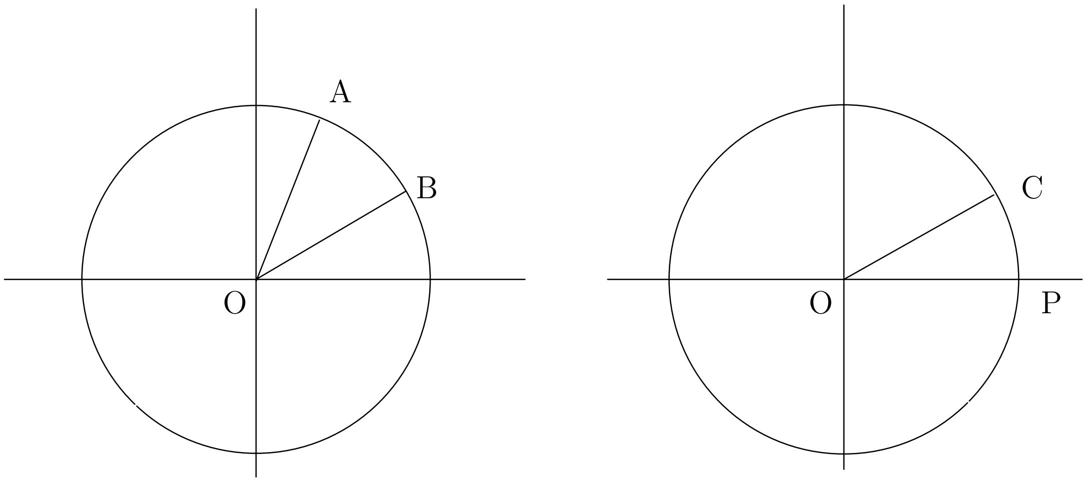
$$\begin{aligned}
\sin(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}) \\
&= \cos((\alpha - \frac{\pi}{2}) - \beta) \\
&= \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})\cos\beta + \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})\sin\beta \\
&= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

最後に β を $-\beta$ で置き換えると $\sin(\alpha + \beta)$ の公式を得る．

公式 (1.6.1) を示そう．原点中心，半径 1 の単位円上に $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を次のように取る．$\alpha > \beta > 0$ として，

$$\mathrm{A}(\cos\alpha, \sin\alpha)$$
$$\mathrm{B}(\cos\beta, \sin\beta)$$
$$\mathrm{C}(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$$

さらに P$(1,0)$ とする．つまり，角 AOB と角 COP は $\alpha-\beta$ で同一である．



したがって，$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$ であるから，これを式で表すと，三平方の定理から，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

$$\overline{\mathrm{CP}}^2=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+\sin^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta).$$

ここでは，恒等式を用いた．よって，

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{1.6.2}$$

$\alpha>\beta>0$ ではない一般の α,β についても (1.6.2) は同様に示される．■

• 問題 **1.6.35**　$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の加法定理から $\tan\theta$ の加法定理を導け．

$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の**倍角の公式**は加法定理から導かれる．

定理 1.6.2 すべての α に対して，

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

証明　$\cos(\alpha+\alpha)$ と $\sin(\alpha+\alpha)$ を計算する．■

• 問題 **1.6.36**　次を導け．

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

問題 1.6.2 から次の**半角の公式**を得る．

定理 1.6.3

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

• 問題 **1.6.37**　定理 1.6.3 を導け.

• 問題 **1.6.38**　次の値を求めよ.
(1) $\sin\frac{\pi}{12}$　(2) $\cos\frac{7\pi}{12}$　(3) $\tan\frac{5\pi}{12}$　(4) $\cos\frac{\pi}{12}$　(5) $\cos\frac{\pi}{8}$

• 問題 **1.6.39**　$\cos 3\alpha$ を $\cos\alpha$ と $\sin\alpha$ で表せ（**３倍角の公式**）.

解答

1.1.1. 平方完成から $y = x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$ を得るので，

$$y + 2 = (x-3)^2.$$

1.1.2. 略

1.1.3. $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ で場合分けせよ．

1.1.4. 略

1.1.5. 割り算により，

$$y = \frac{5-6x}{3x+1} = -2 + \frac{7}{3x+1} = -2 + \frac{7/3}{x+(1/3)}.$$

これより，$y = \frac{7/3}{x}$ を x 方向に $-1/3$, y 方向に -2, 平行移動する．

1.1.6. 略

1.1.7. $\frac{y}{3} = x^2$ より $y = 3x^2$.

1.1.8. y 方向に 2 倍した関数は $y = (\frac{x}{2})^3 = \frac{x^3}{8}$. 一方，$y$ 方向に b 倍したとすると，$\frac{y}{b} = x^3$ だから $y = bx^3$. よって $b = \frac{1}{8}$.

1.1.9. 略

1.1.10. 略

1.1.11. 略

1.1.12. 略

1.2.13. (1) 原点中心，半径 $\sqrt{15}$ の円．　(2) $x^2 + y^2 = 2^2$ を x 方向に 3, y 方向に -4, 平行移動したもの．中心 $(3, -4)$, 半径 2 の円．　(3) 両辺を 8 で割ると，$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$. これは

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

とかけるから，$x^2 + y^2 = 1$ を x 方向に 2 倍, y 方向に $\sqrt{2}$ 倍, 拡大したものである．
(4) 平方完成により，$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 1$. 中心 $(4, 2)$, 半径 1 の円．

(5) 平方完成により，$9(x-1)^2+4(y+1)^2=36$. 両辺を 36 で割ると，

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y+1}{3}\right)^2=1.$$

したがって，これは $x^2+y^2=1$ を x 方向に 2 倍，y 方向に 3 倍して，さらに x 方向に 1, y 方向に -1, 平行移動したもの.

1.3.14. 略

1.3.15. それぞれ $y=\sqrt{x}$ のグラフを，(1) $\frac{y}{-1}=\sqrt{x}$ により，x 軸に関して対称に． (2) $y=\sqrt{\frac{x}{-1}}$ により，y 軸に関して対称に． (3) $y=\sqrt{\frac{x}{1/3}}$ により，x 方向に 1/3 倍に． (4) $y=\sqrt{\frac{x}{-1/2}}$ により，x 方向に反転してさらに 1/2 倍に． (5) $\frac{y}{-1}=\sqrt{\frac{x}{-1}}$ により，x 方向に反転，さらに y 方向に反転． (6) x 方向に 4 平行移動． (7) $\frac{y}{-1}=\sqrt{\frac{x-3}{-1}}$ により，x 方向，y 方向に反転して，さらに x について 3 平行移動． (8) $\frac{y-1}{-1}=\sqrt{\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}}$ により，y 方向に反転，x 方向に 1/2 倍，さらに x について $-1/2$, y について 1 平行移動.

1.4.16.

1.4.17. 例えば 1 と 2 に対して，$1<n<2$ をみたす自然数は存在しない． $\boldsymbol{Z}$ についても同様.

1.4.18.

1.4.19.

1.4.20.

1.4.21. 略

1.5.22.

1.5.23. (1) $y=2x-2$ (2) $y=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ (3) $y=-\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ (4) $y=2+\frac{1}{x+1}$ $(x<-1)$

1.5.24. 略

1.5.25. (1) 1 (2) 4

(3) $x=\log_8 2$ とおくと，これは $8^x=2$ と同じ．指数法則から $2=8^x=(2^3)^x=2^{3x}$. よって $x=\frac{1}{3}$.

(4) 5 (5) -2

1.5.26. $x=\log_a M$, $y=\log_b a$ とおく．指数に直すとそれぞれ，$a^x=M$, $b^y=a$. a について代入すると，$(b^y)^x=M$. 指数法則から $b^{xy}=M$. これは $xy=\log_b M$ である．示せた.

1.5.27. 1. (1) $\log_{10}2^{32}=32\log_{10}2=32\times 0.3=9.6<10$. よって 10 ケタ. (2) 10 ケタ (3) 123 ケタ

(4) 対数法則により，$\log_{10}12^{51}=51\log_{10}12=51(2\log_{10}2+\log_{10}3)=51(0.6+0.48)=55.08<56$. よって 56 ケタ.

2. $3^{20} > 2^{28}$

1.6.28. 略

1.6.29. 1. 略　2. (1) $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で求めると，$x = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$. $2n\pi$ を足して 3π と 5π の間になるのは，$4\pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{7}{6}\pi$ であるから，$x = \frac{25}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi$.　(2) $\frac{7}{6}\pi$.

1.6.30. $\tan\theta = \frac{y}{x}$ より，$\theta+\pi$ のときの単位円上の座標は $(-x, -y)$ である．よって $\tan(\theta+\pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$. これは周期 π であることを言っている．

1.6.31. 前問と同様，$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$. $\tan\theta$ についても同じ．

1.6.32. 略

1.6.33. 略

1.6.34. (1) 略　(2) 略　(3) (i) グラフより直ちに，$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{7}{6}\pi$.　(ii) $0 \leqq \theta < \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi < \theta \leqq 2\pi$.

1.6.35. 恒等式から

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)}$$

1.6.36. $\cos\theta$ の加法定理と恒等式 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いる．

1.6.37. 略

1.6.38.

1.6.39.