微分方程式 夜 演習問題

2004 年 7 月 24 日 (土)

[1] 次の常微分方程式の一般解を求めよ．(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x+y}$ (2) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \sin x$ (3) $\dfrac{dy}{dx} + 4xy^2 = y^2$ (4) $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^3$

[2] 次の常微分方程式を考える．$\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$

(a) $y = \dfrac{1}{x}$ は解であることを示せ．

(b) 一般解を求めよ．

(c) $y(1) = 2$ の下での特殊解を求めよ．

[3] 関数 $y = xe^{-2x}$ は微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ をみたすことを示せ．

[4] 次の微分方程式の初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ のもとでの特殊解を求めよ．$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \cos\dfrac{x}{2}$

[5] 次の微分方程式の一般解を求めよ．$\dfrac{dy}{dx} = x + 2xy$

[6] 次の微分方程式の $y(1) = 1$ のもとでの特殊解を求めよ．$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-2y}{2x+y}$

[7] 次の一階線型非同次方程式を定数変化法に従って一般解を求めよ．$y' + 2y = e^{5x}$

[8] 次の二階線型非同次方程式を考える．$y'' + 4y = \sin 2x$

(1) $Y = Ax\cos 2x$ (A は定数) の形の特殊解を求めよ．

(2) 一般解を求めよ．

[9] 次のベルヌーイ型方程式の一般解を求めよ．$x^2y' = xy + y^2$

[10] 密閉された空間内の温度の変化を微分方程式を通して考察する．時刻 t における室温を $x(t)$ とするとき，次の 1 階線形非同次微分方程式を考える．$x'(t) = -ax(t) + b,\ t > 0$. ここで，$a, b$ は正の数で定数である．温度変化率 $x'(t)$ について，$x'(t) > 0$ のときは温度が上昇の状態にあり，逆に $x'(t) < 0$ のときは下降の状態にある．この方程式は $x'(t) > 0$ のファクターとして熱源 $b > 0$ があり，空間の内から外に逃げる熱の様子を記述するファクターとして $-ax(t) < 0$ がある．したがって，a は温度 $x(t)$ に対する冷却率を表す．

問題 $x(0) = 0$ (初期条件) のもとで特殊解を計算し，$t \to \infty$ のときの (時間が十分に経ったときの) 定常温度を求めよ．

[11] 速度に比例した抵抗を考慮に入れたバネによる振動の方程式を考える．$x''(t) + \gamma x'(t) + \omega^2 x(t) = F(t)$. ただし，$x(t)$ は運動する質点の時刻 t における変位を表し，γ は抵抗に関する比例定数を表し，ω はバネ定数に依存した比例定数を表し，$F(t)$ は外力を表す．ここでは $\gamma > 0, \omega > 0$ とする．次の二つの場合について，$t \to \infty$ における予想される運動の様子を述べよ．

(1) $F(t) = 1$ (定数)

(2) $\gamma = \omega,\ F(t) = e^{-t}$

[**12**] 次の常微分方程式の一般解を求めよ．(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 8y = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos 3x$ (3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5y = 2\cos 2x$

[**13**] 次の 2 階方程式の基本解を求め，そのロンスキー行列式が 0 でないことを確かめよ．$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

[**14**] 次の 2 階常微分方程式の一般解を考える．$\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 3x$

(1) $y = Ax + B$ の形で特殊解を求めよ．

(2) 一般解を求めよ．