序

これはフーリエ級数の収束性に関するノートである．次の結果を証明することを目的とする．

定理 0.0.1 実数値連続関数 $f(x)$ は区分的に滑らかで，周期 2π である．このとき，

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

で与えられる f のフーリエ係数に対して

$$
f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)
$$

は一様収束の意味で成立する．

目 次

第1章　フーリエ級数の収束性

1.1　フーリエ級数の各点収束性

フーリエ級数の収束性について論じる．周期 2π の周期関数 $f(x)$ に対して，

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{ただし，}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

を考える．

$$f(x) = S(x) \text{ となるのはどのようなときか？}$$

この問題はそれほど自明ではない．

例 1.1.1 $f(x) = x$ $(-\pi < x \leq \pi)$ を周期的に拡張した関数を考える（改めて $f(x)$ とかく）．このとき，

$$S(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots).$$

ここで $x = \pi$ を代入すると $S(\pi) = 0$. 一方，$f(\pi) = \pi$ であるから $f(\pi) \neq S(\pi)$ である．

準備

閉区間 $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ について，

定義 1.1.1 (区分的に連続) $f(x)$ が $[a, b]$ で**区分的に連続**とは，$[a, b]$ の有限個の点 $x_1, \ldots, x_k$

を除いて連続でかつ

$$\lim_{\varepsilon \to +0} f(x_j + \varepsilon) = f(x_j + 0) \quad \text{右極限値}$$
$$\lim_{\varepsilon \to +0} f(x_j - \varepsilon) = f(x_j - 0) \quad \text{左極限値}$$

が存在するときをいう.

問題 1.1.1 (1) 区分的に連続である関数, (2) そうでない関数, の例を挙げよ.

解 (1) $f(x) = 1$ $(-\pi \leq x \leq 0)$, $f(x) = 0$ $(0 < x \leq \pi)$ をみたす $f(x)$ は $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続.

(2) $f(x) = 1/x$ $(x \neq 0)$, $f(x) = 0$ $(x = 0)$ をみたす $f(x)$ は $[-1, 1]$ で区分的に連続ではない.

定義 1.1.2 (区分的に滑らか) $f(x)$ が $[a, b]$ で**区分的に滑らか**とは, $[a, b]$ で区分的に連続でかつ, $f'(x)$ が $[a, b]$ で区分的に連続のときをいう.

問題 1.1.2 (1) 区分的に滑らかである関数, (2) そうでない関数, の例を挙げよ.

解 (1) $f(x) = -x$ $(-1 \leq x \leq 0)$, $f(x) = x$ $(0 < x \leq 1)$ は区分的な滑らか.

$f(x) = 0$ $(-\pi \leq x \leq 0)$, $f(x) = 1$ $(0 < x \leq \pi)$ は区分的に滑らか.

(2) $f(x) = \sqrt{-x}$ $(-1 \leq x \leq 0)$, $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 < x \leq 1)$ は区分的に滑らかではない. $x = 0$ で不具合が起こる.

定義 1.1.3 (区分的に連続な関数の対する定積分) $f(x)$ は $[a, b]$ で区分的に連続な関数とする. 不連続点 $x_1, \ldots, x_k$ について

$$\int_a^b f(x)dx := \left(\int_a^{x_1 - 0} + \int_{x_1 + 0}^{x_2 - 0} + \cdots + \int_{x_k - 0}^{b} \right) f(x)\, dx.$$

問題 1.1.3 $f(x) = x$ $(0 \leq x \leq \pi)$, $f(x) = 2\pi$ $(\pi < x \leq 2\pi)$ で与える $f(x)$ について $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ を求めよ.

解

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi - 0} x dx + \int_{\pi + 0}^{2\pi} 2\pi dx.$$

区分的に滑らかな関数に対する結果を述べる.

定理 1.1.1 (リーマン・ルベーグの定理) $f(x)$ は $[a,b]$ で <u>区分的に滑らか</u> とする．このとき

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos kx\,dx=0,$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin kx\,dx=0.$$

一般には $a_k\to\infty$ $(k\to\infty)$ なる数列に対して

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(a_kx)\,dx=\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(a_kx)\,dx=0$$

証明　簡単のため不連続点は c（１つ）であるとする，$a<c<b$. 部分積分により

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\cos kxdx\\
=\;&\int_a^c f(x)\cos kxdx+\int_c^b f(x)\cos kxdx\\
=\;&[\frac{f(x)}{k}\sin kx]_a^{c-0}-\frac{1}{k}\int_a^c f'(x)\sin kxdx\\
&\quad+[\frac{f(x)}{k}\sin kx]_{c+0}^{b}-\frac{1}{k}\int_c^b f'(x)\sin kxdx\\
=\;&\frac{f(c-0)}{k}\sin k(c-0)-\frac{f(a)}{k}\sin ka-\frac{1}{k}\int_a^c f'(x)\sin kxdx+\cdots
\end{aligned}$$

ここで

$$I:=\frac{f(c-0)}{k}\sin k(c-0)-\frac{f(a)}{k}\sin ka-\frac{1}{k}\int_a^c f'(x)\sin kxdx$$

とおく．区分的に滑らかだから条件として

$$|f(x)|\le\exists M_0,\quad |f'(x)|\le M_1,\qquad x\in[a,b]$$

に注意．よって三角不等式から

$$\begin{aligned}
&|I|\\
\le\;&\frac{|f(c-0)|}{k}|\sin k(c-0)|+\frac{|f(a)|}{k}|\sin ka|+\frac{1}{k}\int_a^c|f'(x)||\sin kx|dx\\
\le\;&\frac{2M_0}{k}+\frac{1}{k}\int_a^{c-0}M_1dx\to 0,\quad k\to\infty.
\end{aligned}$$

残りの項についても同様に示せる． ■

主結果

収束性に関する結果を述べる．

定理 1.1.2 (各点収束) $f(x)$ は $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかな周期 2π の関数とする．各 x 毎に,

$$\tilde{f}(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

とおくとき，すべての x に対して

$$\tilde{f}(x)=S(x):=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

が成立する．ただし，a_n, b_n は $f(x)$ のフーリエ係数.

注意 1.1.1 (1) $f(x)$ が連続な点 x では $f(x)$ は $S(x)$ に一致する：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

(2) 周期的拡張した関数が連続ならば，右辺の三角級数は $f(x)$ に一様収束することが知られている．不連続点を持つ区分的に滑らかな場合については，一様連続性は期待できない[1].

例 1.1.2 (1) $f(x)=x$ $(0\le x\le\pi)$ を偶関数拡張，周期的拡張した関数は $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかかつ，すべての点 x で連続．ゆえにそのフーリエ余弦展開はすべての点で $f(x)$ と一致する：

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots).$$

$x=0$ を代入すると

$$0=f(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots).$$

$$\therefore\ \frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

(2) $f(x)=x$ $(0\le x\le\pi)$ を奇関数拡張，周期的拡張した関数は $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかかつ，$x=n\pi$ で不連続．そのフーリエ正弦展開は

$$\tilde{f}(x)=2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots).$$

[1] subsection 1.3 を参照.

$x=\pi$ を代入すると定義から

$$\tilde{f}(\pi)=0$$

であるので，よって $\tilde{f}(0)=S(0)$．$x=\pi/2$ を代入すると，ここでは f は連続だから

$$\frac{\pi}{2}=f(\frac{\pi}{2})=2(\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}-\cdots).$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

問題 1.1.4 $f(x)=x^2$ $(0\le x\le\pi)$ のフーリエ余弦展開を求め，$x=\pi$ とおいて得られる公式は何か．一方，フーリエ正弦展開において $x=\pi$, $x=\frac{\pi}{2}$ とおいて得られる公式は何か．

以下において，定理 1.1.2 の証明を行う．

ディレクレ核

有限和

$$S_N(x):=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

について x 毎に $S_N(x)\to S(x)$ $(N\to\infty)$ ならば

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

であると理解する．よって示すことは f に対して

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,$$

とおいて，

$$S_N(x)\longrightarrow\tilde{f}(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},\quad N\to\infty.$$

さて，

$$
\begin{aligned}
& S_n(x) \\
= \ & \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy \\
+ \ & \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos kydy\right)\cos kx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin kydy\right)\sin kx\right\} \\
= \ & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos ky\cos kx + \sin ky\sin kx)\right\} f(y)dy \\
= \ & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right\} f(y)dy. \quad \because \text{加法定理}
\end{aligned}
$$

ここで

$$
D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt \quad \text{ディレクレ核}
$$

命題 1.1.1 (1) $D_n(-t) = D_n(t)$: even function

(2) $D_n(t+2\pi) = D_n(t)$: 2π-period

以上から

$$
S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y-x)f(y)dy.
$$

オイラーの公式を用いて，ディレクレ核に別表示を与える．

補題 1.1.1 (オイラーの公式)

$$
\cos ky = \frac{e^{iky} + e^{-iky}}{2}, \quad i = \sqrt{-1}.
$$

$$
\sin ky = \frac{e^{iky} - e^{-iky}}{2i}
$$

これを用いて

$$
\begin{aligned}
D_n(y) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{iky} + e^{-iky}}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} e^{iky} + \sum_{k=1}^{n} e^{-iky}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{iky} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(e^{iy})^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\,\frac{e^{-iny}(1-(e^{iy})^{2n+1})}{1-e^{iy}} \quad \text{等比級数の和}\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{e^{-iny-i\frac{y}{2}}(1-(e^{iy})^{2n+1})}{e^{-i\frac{y}{2}}-e^{i\frac{y}{2}}} \quad \text{分母分子に } e^{-i\frac{y}{2}} \text{ を乗ずる}\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{(e^{-i(n+\frac{1}{2})y}-e^{i(n+\frac{1}{2})y})/2i}{(e^{-i\frac{y}{2}}-e^{i\frac{y}{2}})/2i}\\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{y}{2}}.
\end{aligned}
$$

以上から次を得た.

命題 1.1.2

$$D_n(y)=\frac{\sin\frac{(2n+1)y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}}.$$

さて，ディレクレ核の定積分を求める.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi D_n(y)dy &= \int_0^\pi (\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n \cos ky)dy\\
&= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos ky dy\\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

よって次を得た.

命題 1.1.3

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(y)dy = 1.$$

これより変数変換を用いて

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}}\,dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\,dy\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)y'}{\sin y'}2dy' \quad \frac{y}{2}=y' \text{ で変数変換}\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)y'}{\sin y'}dy'.
\end{aligned}
$$

以上から次を得た.

命題 1.1.4

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}dy = 1.$$

各点収束性の証明の完結

$S_n(x)$ をディリクレ核を用いて書くと

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y-x)f(y)dy.$$

$D_n(y-x)f(y)$ は y について 2π-period であるから

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x} D_n(y-x)f(y)dy.$$

よって，$-\pi \le y-x \le \pi$. 積分区間を 2 つに割って[2]

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{x} f(y)\frac{\sin(2n+1)\frac{(y-x)}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}}\,dy \\ &\quad +\frac{1}{\pi}\int_{x}^{\pi+x} f(y)\frac{\sin(2n+1)\frac{(y-x)}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}}\,dy =: I_1(x)+I_2(x). \end{aligned}$$

$$I_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{x} f(y)\,\frac{\sin\frac{(2n+1)(y-x)}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}}\,dy$$

$$I_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x}^{\pi+x} f(y)\,\frac{\sin\frac{(2n+1)(y-x)}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}}\,dy$$

さて，I_1 を変形する．
$y-x=-t$ で y から t に変数変換：

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x-t)\frac{\sin\frac{(2n+1)(-t)}{2}}{2\sin\frac{-t}{2}}(-dt) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \end{aligned}$$

さらに
$\frac{t}{2}=s$ で変数変換：

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x-2s)\frac{\sin(2n+1)s}{2\sin s}2ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} f(x-2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt. \end{aligned}$$

[2] $-\pi \le y-x \le 0$ と $0 \le y-x \le \pi$ に分ける．

一方 I_2 については
$y-x=t$ で y から t に変数変換：

$$I_2(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\frac{(2n+1)t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

さらに
$\frac{t}{2}=s$ で変換：

$$\begin{aligned}I_2(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x+2s)\frac{\sin(2n+1)s}{2\sin s}2ds \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x+2t)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt.\end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(f(x+2t)+f(x-2t)\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}\,\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt\end{aligned}$$

を得る．

さて，前命題から

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt=1$$

だから

$$\tilde{f}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\tilde{f}(x)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt.$$

よって

$$\begin{aligned}&S_n(x)-\tilde{f}(x) \\ =\ &\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}-\tilde{f}(x)\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt.\end{aligned}$$

ここで，$\delta>0$ を十分に小さいとして，$S_n(x)-\tilde{f}(x)$ の右辺を 2 つの積分区間に分ける．

$$\begin{aligned}&S_n(x)-\tilde{f}(x) \\ =\ &\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}-\tilde{f}(x)\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt \\ &+\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2}\left(\frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2}-\tilde{f}(x)\right)\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt.\end{aligned}$$

ここで
$$\varphi(t) := \frac{f(x+2t)+f(x-2t)}{2} - \tilde{f}(x).$$
とおいて，第一項を
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{\varphi(t)}{t}\,\frac{t}{\sin t}\,\sin(2n+1)t\;dt$$
と見る．ただし

φ は $[0,\delta]$ で区分的に滑らか，かつ $\varphi(0)=0$. 平均値の定理から
$$\frac{\varphi(t)}{t} = \varphi'(c):\quad \text{有界}\quad 0<c<t.$$
よって, 非積分関数は <u>n によらず</u>，有界である（大きくならない）．ゆえに δ が非常に小さいとき <u>第一項は無視できる</u>.

一方，第二項については
$$\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2} \frac{\varphi(t)}{\sin t}\sin(2n+1)t\;dt$$
と書き換えると，関数
$$\frac{\varphi(t)}{\sin t}$$
は，$\sin t$ は 0 から離れていて，したがって f がそうであるように区分的に滑らかである．リーマン・ルベーグの定理により
$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi/2} \frac{\varphi(t)}{\sin t}\sin(2n+1)t\;dt \longrightarrow 0,\quad n\to\infty.$$
第二項は 0 に収束する．

以上で証明を終える．■

1.2　フーリエ級数の最良近似問題

区間 $[-\pi,\pi]$ で区分的に連続な関数 $f(x)$ のフーリエ係数は
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad (n\ge 0),$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad (n\ge 1)$$

で与えられる．このとき，$f(x)$ を三角多項式

$$T_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$$

により $f(x)$ を最良の誤差で近似したい．c_n, d_n をどのように取ればよいか？

同じ問題を複素フーリエ係数について考える．$f(x)$ の複素フーリエ級数は

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

で与えられる．

$$\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx}$$

により $f(x)$ を最良の誤差で近似したい．γ_k をどのように取ればよいか？

誤差を

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ikx}\right|^2 dx \qquad \textbf{平均 2 乗 (平方) 誤差}$$

で測るとき，つぎの結果が成り立つ．

定理 1.2.1 f を $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続な関数とする．このとき，どんな $n \geqq 1$ についても，$\gamma_k = c_k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$ に取れば平均 2 乗誤差は常に最小になる[3]．

証明　平均 2 乗誤差を計算する．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ikx}\right|^2 dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ikx}\right)\overline{\left(f(x) - \sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ikx}\right)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x)^2 - f(x)\sum_{k=-n}^{n}\overline{\gamma_k}e^{-ikx} - f(x)\sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ikx}\sum_{k=-n}^{n}\overline{\gamma_k}e^{-ikx}\right\}dx \\
&= (*).
\end{aligned}$$

[3] すべての項数 n について，γ_k をフーリエ係数 c_k に取れば，誤差は最良になる，最も小さくなる．これは **フーリエ係数の最終性** と呼ばれる．平均 2 乗 (平方) 誤差以外の誤差で測ると，一般に n が変わると誤差最良のためには γ_k の取り方は変わる．例えば n から $n+1$ に変えると，最良のためにはすべての k について γ_k を取り直さねばならない．

ここで

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$$
$$\overline{c_k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n}(\gamma_k\overline{c_k} + \overline{\gamma_k}c_k) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n}\gamma_k e^{ikx}\sum_{\ell=-n}^{n}\overline{\gamma_\ell}e^{-i\ell x}\,dx \\ &= (**).\end{aligned}$$

さらに，$k \neq \ell$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-i\ell x}\,dx = \left[\frac{1}{i(k-\ell)}e^{i(k-\ell)x}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

もし $k = \ell$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-i\ell x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

であるから，

$$\begin{aligned}(**) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n}(\gamma_k\overline{c_k} + \overline{\gamma_k}c_k) + \sum_{k=-n}^{n}|\gamma_k|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n}c_k\overline{c_k} + \sum_{k=-n}^{n}\{(c_k-\gamma_k)\overline{c_k} - \overline{\gamma_k}c_k\} + \sum_{k=-n}^{n}\gamma_k\overline{\gamma_k} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n}(c_k-\gamma_k)(\overline{c_k-\gamma_k}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n}|c_k-\gamma_k|^2.\end{aligned}$$

以上で示せた．■

これより直ちにつぎの結果が従う．

系 1.2.1 (ベッセルの不等式) f が $[-\pi,\pi]$ で区分的に連続ならば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx \geqq \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2$$

証明　前定理の証明から

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx-\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2.$$

左辺は非負であるから

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx \geqq \sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2.$$

右辺は n について単調増加．左辺については $f(x)^2$ はやはり区分的に連続だから

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx<\infty.$$

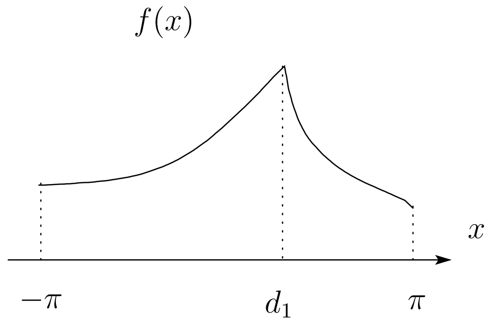
つまり，$\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2$ は n について上に有界．よって $n\to\infty$ のとき，

$$\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2 \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2\,dx.$$

以上で示せた．■

1.3　フーリエ級数の一様収束性

ベッセルの不等式を用いてフーリエ級数の一様収束性を導く．関数 f は $[-\pi,\pi]$ において区分的に滑らかで，$\mathbf{R}$ 全体に周期 2π で周期的拡張されたものとする．さらに $\mathbf{R}$ で連続とする．



このとき，

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}\,dx,\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

とするとき，

$$f(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx},\quad -\infty<x<\infty\quad \textbf{各点収束}$$

である．有限和

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

について，次の結果が成り立つ．

定理 1.3.1 f は $[-\pi, \pi]$ において区分的に滑らかで，$\mathbf{R}$ 全体に周期 2π で周期的拡張されたものとする．さらに $\mathbf{R}$ で連続とする．このとき，

$$S_n \rightrightarrows f \quad \textbf{一様収束.}$$

証明 簡単のため，滑らかでない点を d_1 (1 つ) として考える，連続性により

$$f(-\pi) = f(\pi)$$

である．関数 g をつぎで与える．

$$g(x) = \begin{cases} f'(-\pi+0), & x = -\pi \\ f'(x), & x \in (-\pi, d_1) \cup (d_1, \pi) \\ f'(d_1 - 0), & x = d_1 \\ f'(\pi - 0), & x = \pi \end{cases}$$

g は $[-\pi, \pi]$ で区分的に連続である．g のフーリエ係数 c'_k は部分積分により，

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{d_1} f'(x) e^{-ikx}\, dx + \int_{d_1}^{\pi} f'(x) e^{-ikx}\, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[f(x) e^{-ikx} \right]_{-\pi}^{d_1} + ik \int_{-\pi}^{d_1} f(x) e^{-ikx}\, dx + \left[f(x) e^{-ikx} \right]_{d_1}^{\pi} + ik \int_{d_1}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \right\} \\ &= (*). \end{aligned}$$

$f(-\pi) = f(\pi)$, $e^{-ik\pi} = e^{ik\pi}$ だから

$$(*) = \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = ikc_k.$$

ただし，c_k は f のフーリエ係数．つぎを示すことができた．

命題 1.3.1 $c'_k = ikc_k$.

この命題とベッセルの不等式により

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx \geqq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k'|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2|c_k|^2.$$

これを用いてつぎの命題を示す.

命題 1.3.2 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k| < \infty$.

実際, $k \neq 0$ に対して,

$$|c_k| = k|c_k|\frac{1}{k} \leq \frac{k^2|c_k|^2}{2} + \frac{1}{2k^2}.$$

同様に

$$|c_{-k}| \leq \frac{k^2|c_k|^2}{2} + \frac{1}{2k^2} \quad (\because c_{-k} = \overline{c_k}).$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k| &= |c_0| + \sum_{k\geqq 1}(|c_k| + |c_{-k}|)\\ &\leqq |c_0| + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k^2|c_k|^2}{2} + \sum_{k\geqq 1}\frac{1}{k^2}\\ &\leqq |c_0| + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx + \sum_{k\geqq 1}\frac{1}{k^2} < \infty.\end{aligned}$$

命題を示せた.

さて,

$$|S_n(x) - f(x)| \leq \sum_{|k|\geqq n+1}|c_k e^{ikx}| = \sum_{|k|\geqq n+1}|c_k| \quad (x \text{ によらない})$$

命題 1.3.2 により一様収束性が従う. ■