実解析 I 演習　1 学期　　No.1　　'96.4.12

It is trite but true that mathematics is learned by doing it, not by watching other people do it.

定義. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を実数列とするとき、

$$\overline{\lim}\, a_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{i\geq n} a_i$$
$$\underline{\lim}\, a_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{i\geq n} a_i$$

で定義する。

1. 上の定義は定義可能であること（つまり、定義が意味をもつこと）を示せ。

2. $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ を示せ。

3.

$$p > 0 \Longrightarrow \underline{\lim}\, pa_n = p\,\underline{\lim}\, a_n,\ \ \overline{\lim}\, pa_n = p\,\overline{\lim}\, a_n.$$
$$q < 0 \Longrightarrow \underline{\lim}\, qa_n = q\,\overline{\lim}\, a_n,\ \ \overline{\lim}\, qa_n = q\,\underline{\lim}\, a_n.$$

4. $\{a_n\}, \{b_n\}$ が有界のとき、

$$\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \underline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n.$$

5. 問 *4* で等号が成立しない例を挙げよ。

6. $a_n \geq 0, b_n \geq 0,\ (\forall n)$ ならば、

$$(\underline{\lim}\, a_n)(\underline{\lim}\, b_n) \leq \underline{\lim}(a_n b_n) \leq (\underline{\lim}\, a_n)(\overline{\lim}\, b_n),\ (\overline{\lim}\, a_n)(\underline{\lim}\, b_n)$$
$$\leq \overline{\lim}(a_n b_n) \leq (\overline{\lim}\, a_n)(\overline{\lim}\, b_n).$$

7. $\{a_n\}$ 収束列 $\Longleftrightarrow -\infty < \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n < +\infty.$

8. $\{a_n\}$ を相異なる有界列とする。$\underline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\, a_n$ は $\{a_n\}$ の集積点であることを示せ。また、γ を $\{a_n\}$ の集積点とすると、

$$\underline{\lim}\, a_n \leq \gamma \leq \overline{\lim}\, a_n$$

となることを示せ（すなわち、$\underline{\lim}\, a_n, \overline{\lim}\, a_n$ は $\{a_n\}$ のそれぞれ最大、最小の集積点である)。

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

定義 2 X を空でない集合、A_n を X の集合列とする。

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i, \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$$

で定義する。

(1) $\left(\overline{\lim} A_n\right)^c = \underline{\lim} {A_n}^c, \quad (\underline{\lim} A_n)^c = \overline{\lim} {A_n}^c.$

(2) $x \in \overline{\lim} A_n \iff A_1, A_2, \cdots$ のうち無限個のものに x は属する。

(3) $x \in \underline{\lim} A_n \iff$ 有限個を除く残りのすべての A_n に x は属する。

(4) $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n.$

ただし、c は補集合を表す。

定義 3 $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$ をみたすとき、これを $\lim A_n$ とかく。集合列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ なる場合、増加列であるといい $A_n \uparrow$ と表し、$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ なる場合、減少列であるといい $A_n \downarrow$ で表す。

10.

(1)
$$A_n \uparrow \Longrightarrow \lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
$$A_n \downarrow \Longrightarrow \lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

(2)
$$\overline{\lim} A_n = \lim \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$$

$$\underline{\lim} A_n = \lim \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i$$

11. $A_n \cap A_m = \emptyset \ (n \neq m) \Longrightarrow \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \emptyset.$

12. 問 9(4) において、等号でない例を挙げよ。

13. X, Y を集合、$f : X \to Y$ を写像、$A, A_\mu \subset X \ (\mu \in M)$, $B, B_\lambda \subset Y \ (\lambda \in \Lambda)$ とする。

(1) $$f\left(\bigcup_{\mu \in M} A_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} f(A_\mu)$$

(2) $$f\left(\bigcap_{\mu \in M} A_\mu\right) \subset \bigcap_{\mu \in M} f(A_\mu)$$

(3) $$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

(4) $$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

(5) $$f(A^c) \subset (f(A))^c$$

(6) $$f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$$

(7) $$f^{-1}(f(A)) \supset A$$

(8) $$f(f^{-1}(B)) \subset B$$

14. 問 13 において、f が単射ならば (7) で等号が成立し、f が全射ならば (8) で等号が成立することを示せ。

15. $A \subset X$ に対し、A の定義関数を $\chi_A(x)$ で表す。すなわち、

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

(1)
$$\chi_{\cap_{\mu \in M} A_\mu}(x) = \inf_{\mu \in M} \chi_{A_\mu}(x)$$

(2)
$$\chi_{\cup_{\mu \in M} A_\mu}(x) = \sup_{\mu \in M} \chi_{A_\mu}(x)$$

(3)
$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$$

(4)
$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$$

(5)
$$\chi_{A \triangle B}(x) = |\chi_A(x) - \chi_B(x)|$$

ただし、$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, これを A, B の対称差集合という。

(6)
$$\chi_{\overline{\lim} A_n}(x) = \overline{\lim} \chi_{A_n}(x)$$

(7)
$$\chi_{\underline{\lim} A_n}(x) = \underline{\lim} \chi_{A_n}(x)$$

定義 4 X の集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、$A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$ $(\lambda \neq \mu)$ のとき、

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

とかく。

16. (1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B.$

(2) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$

(3) $A \triangle B = B \triangle A.$

(4) $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ に対して、

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \ (n \geq 2)$$

とおくと、

$$B_j : \text{disjoint}$$
$$\bigcup_{j=1}^\infty A_j = \sum_{j=1}^\infty B_j$$

が成立することを示せ。

(5) $A_j = \sum_{i=1}^{m_j} A_i^{(j)}$ $(j = 1, \cdots, n)$ のとき、

$$\bigcap_{j=1}^n A_j = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} \left(A_{i_1}^{(1)} \cap A_{i_2}^{(2)} \cap \cdots \cap A_{i_n}^{(n)} \right).$$

定義 5 X の集合族 $\mathcal{A}$ が有限加法族とは、

(1) $$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

(2) $$A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$$

をみたすときをいう。

17.

$$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A} \implies \begin{array}{l} A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A} \\ A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{A}. \end{array}$$

18. $\emptyset \in \mathcal{A}, \quad X \in \mathcal{A}$ を示せ。

19. $X = \{1, 2, 3\}$ の有限加法族をすべて挙げよ。

20.

$$X = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

$$\mathcal{R} = \{A : A \text{ または } A^c \text{ が } \{1\} \text{ を含まない有限集合 }\}$$

とするとき、$\mathcal{R}$ は有限加法族であることを示せ。

定義 6 X の集合族 $\mathcal{E}$ が *elementary family* とは、

(1) $$\emptyset \in \mathcal{E}$$

(2) $$A, B \in \mathcal{E} \implies A \cap B \in \mathcal{E}$$

(3) $A \in \mathcal{E} \implies \exists n \geq 1,\ \exists A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{E}\ s.t.\ A^c = \sum_{j=1}^n A_j$

をみたすときをいう。

21. $X \in \mathcal{E}$ を示せ。

定義 7

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \sum_{i=1}^n A_i : \exists n \geq 1,\ \exists A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{E} \right\}$$

とおく。

22. (1) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (問 16(5) を用いよ).

(2) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$ (問 16(5) を用いよ).

(この 2 つの結果から $\mathcal{A}$ は有限加法族である)

定義 8

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R}^2) &= \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] : \\ &\qquad -\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty \ \ (i = 1, 2)\}\end{aligned}$$

とおく *(*$\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R}^2)$ の元を $\mathbf{R}^2$ の区間という*)*。

23. $\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R}^2)$ は elementary family である。

24. $\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R}^2)$ から定義 7 に習って、有限加法族 $\mathcal{A}_{left}(\mathbf{R}^2)$ を構成せよ ($\mathcal{A}_{left}(\mathbf{R}^2)$ の元を $\mathbf{R}^2$ の区間塊という) 。

定義 9 X の集合族 $\mathcal{B}$ が σ 加法族とは、

(1) $$E_j \in \mathcal{B}\ (j = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{B}$$

(2) $$E \in \mathcal{B} \Longrightarrow E^c \in \mathcal{B}$$

をみたすときをいう。

25. 有限加法族であって、σ 加法族でない例を挙げよ。

26. X の部分集合全体 2^X は σ 加法族であることを示せ。

27. σ 加法族 $\mathcal{B}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して、

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$$

は σ 加法族であることを示せ。

28. σ 加法族 $\mathcal{B}$ に対して、

$$E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{B} \Longrightarrow \overline{\lim} E_n,\ \underline{\lim} E_n \in \mathcal{B}.$$

定義 10 $\mathcal{E}$ を X の集合族とするとき、$\mathcal{E}$ を含む最小の σ 加法族を $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ で表す。最小という意味は、$\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ をみたす任意の σ 加法族 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{B}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$ が成立するということである。この $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ を $\mathcal{E}$ の生成する σ 加法族という。特に、$X = \mathbf{R}^n$,

$$\mathcal{O}_{\mathbf{R}^n} = \{\mathbf{R}^n \text{ の開集合の全体 }\}$$

としたとき、$\mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}^n})$ を *Borel class,* それに属する元を *Borel set* という。

29. $\mathcal{E}_1$ を $\mathcal{E}$ の元とその補集合の全体とするとき、

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{jk} \right) : A_{jk} \in \mathcal{E}_1 \right\}$$

とおくと、$\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathcal{E})$ であることを示せ。

30. Borel class $\mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}^n})$ は $\mathbf{R}^n$ の有界閉集合全体が生成する σ 加法族であることを示せ。

31. f を X 上の実数値関数とするとき、

$$\mathcal{B}_f = \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}^1})\}$$

によって定義される $\mathcal{B}_f$ は X の σ 加法族であることを示せ。

32. X, Y を集合、$\mathcal{A}$ を Y の集合族とする。このとき、

$$\left\{ f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathcal{A}) \right\} = \mathcal{B}\left(\left\{ f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A} \right\} \right)$$

を示せ (問 29 を用いよ) 。

33. $\mathcal{D}$ を X の集合族、$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{D})$ とする。$\tilde{X} \subset X,\ \tilde{X} \neq \emptyset$ なる $\tilde{X}$ に対して、

$$\mathcal{B} \cap \tilde{X} = \{B \cap \tilde{X} : B \in \mathcal{B}\}$$

とおくとき、$\mathcal{B} \cap \tilde{X}$ は X の集合族で σ 加法族となることを示せ。さらに

$$\mathcal{B} \cap \tilde{X} = \mathcal{B}(\mathcal{D} \cap \tilde{X})$$

となることを示せ。ただし、

$$\mathcal{D} \cap \tilde{X} = \{A \cap \tilde{X} : A \in \mathcal{D}\}.$$

定義 11 $\mathcal{B}$ を X の σ 加法族とする。$\forall A \in \mathcal{B}$ に対して、$0 \le \mu(A) \le \infty$ がただ一つ定まり次の性質をみたすとき、μ を $\mathcal{B}$ 上の測度という。

(1)
$$\mu(\emptyset) = 0,$$

(2)
$$A_j \in \mathcal{B}\ (j = 1, 2, \cdots), disjoint$$
$$\Longrightarrow \mu\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

この $X, \mathcal{B}, \mu$ を一つの組と考えて、$(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間という。

34. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とするとき、つぎのことを示せ。

(1)
$$A, B \in \mathcal{B},\ A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \le \mu(B).$$

(2)
$$A_n \in \mathcal{B}\ (n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(3)
$$A_n \in \mathcal{B},\ A_n \uparrow \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(4)
$$A_n \in \mathcal{B},\ A_n \downarrow,\ \mu(A_1) < \infty$$
$$\Longrightarrow \mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(5)
$$\mu(\underline{\lim} A_n) \le \underline{\lim} \mu(A_n).$$

(6) $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty \Longrightarrow \mu(\overline{\lim} A_n) \geq \overline{\lim}\mu(A_n).$$

(7) $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty,\ \exists \lim A_n$$
$$\Longrightarrow \mu(\lim A_n) = \lim \mu(A_n).$$

35. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする。$\mu(X) = 1,\ A_j \in \mathcal{B}\ (j = 1, 2, \cdots),\ \mu(A_j) = 1\ (\forall j)$ ならば、

$$\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = 1$$

を示せ。

36. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \Longrightarrow \mu(\overline{\lim} A_n) = 0,\ \mu(\underline{\lim} {A_n}^c) = \mu(X)$$

を示せ。

37. $\mathcal{B}$ を σ 加法族とするとき、次の (1), (2), (3) をみたす $\mathcal{B}$ 上の関数 μ は測度であることを示せ。

(1) $$\forall A \in \mathcal{B} \Longrightarrow 0 \leq \mu(A) \leq \infty,$$

(2) $$A, B \in \mathcal{B}, \mathrm{disjoint} \Longrightarrow \mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B),$$

(3) $$A_j \in \mathcal{B},\ A_{j+1} \subset A_j\ (j = 1, 2, \cdots),\ A_j \to \emptyset$$
$$\Longrightarrow \mu(A_j) \to 0.$$

38. 問 37 において、μ が $\mathcal{B}$ 上の有限測度、すなわち $\mu(X) < \infty$ のとき μ は (1), (2), (3) をみたすことを示せ。

39. $\mu(X) < \infty$ ならば、$\{x\} \in \mathcal{B}$ で $\mu(\{x\}) > 0$ となる点は高々可算無限個しかないことを示せ。

さてここから、1 次元左半開区間全体 $\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R})$ 上の集合関数$\tilde{m}$ (長さとして自然な導入) から出発して、σ 加法族とその上の測度を構成することを試みる。

定義 12 *elementary family* $\mathcal{E}$ 上の有限加法的測度 $\tilde{m}$ とは、次をみたすときをいう。

$$\tilde{m}(\emptyset) = 0, \tag{1}$$

$$0 \leq \tilde{m}(A) \leq \infty, \quad \forall A \in \mathcal{E}, \tag{2}$$

$$A, B \in \mathcal{E}, disjoint,\ A + B \in \mathcal{E} \tag{3}$$

$$\Longrightarrow \tilde{m}(A + B) = \tilde{m}(A) + \tilde{m}(B).$$

定義 13 定義 7 において *elementary family* $\mathcal{E}$ から構成した、区間塊全体 $\mathcal{A}$ に属する集合 $A = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ A_i \in \mathcal{E}$ に対して、

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{m}(A_i)$$

とおく。

40. (1) $m(A)$ は A の表現の仕方によらないことを示せ。つまり、

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{\ell=1}^{m} B_\ell,$$

$$A_i, B_\ell \in \mathcal{E},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j), B_\ell \cap B_k = \emptyset\ (\ell \neq k)$$

ならば

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i) = \sum_{\ell=1}^{m} m(B_\ell).$$

(2) $m(A) = \tilde{m}(A), \quad A \in \mathcal{E}$ を示せ。

定義 14 m が X の有限加法族 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度とは次をみたすときをいう。

(1)
$$m(\emptyset) = 0,$$

(2)
$$0 \leq m(A) \leq \infty, \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

(3)
$$A, B \in \mathcal{A}, disjoint \Longrightarrow m(A + B) = m(A) + m(B).$$

41. m 有限加法族 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度ならば次の性質をみたすことを示せ。

(1)
$$A_j \in \mathcal{A}\ (j = 1, \cdots, n)$$
$$\Longrightarrow m(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \leq \sum_{j=1}^{n} m(A_j),$$

(2)
$$A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A \Longrightarrow m(B) \leq m(A),$$

(3)
$$A, B \in \mathcal{A},\ B \subset A,\ m(A) < \infty$$
$$\Longrightarrow m(A \setminus B) = m(A) - m(B).$$

42. 定義 13 で構成した m は 区間塊全体 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度であることを示せ ($\mathcal{A}$ が有限加法族であることは問 22 より従う) 。

さて

$$\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R}) = \{(a, b] : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

は問 23 と同様にして elementary family であることがわかる。ここで

$$\tilde{m}(I) = b - a, \quad \forall I = (a, b] \in \mathcal{E}_{left}(\mathbf{R})$$

とおく (ただし、$a = b = \infty, -\infty$ の場合は除外する) 。

43. $\tilde{m}$ は $\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R})$ 上の有限加法的測度であることを示せ。

44. $\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R})$ から構成される区間塊全体 $\mathcal{A}_{left}(\mathbf{R})$ 上の有限加法的測度 m を定義 13 に習って構成せよ。

45. elementary family $\mathcal{E}$ 上の有限加法的測度 $\tilde{m}$ が $\mathcal{E}$ 上でσ 加法的、すなわち

$$A_j \in \mathcal{E}, \text{disjoint}, \ \sum_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{E} \Longrightarrow \tilde{m}(\sum_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{m}(A_j)$$

ならば、$\mathcal{E}$ から構成した区間塊全体 $\mathcal{A}$ 上の m もまた σ 加法的であることを示せ。

46. $I, I_n \in \mathcal{E}_{left}(\mathbf{R})$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が $I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ のとき、

$$\tilde{m}(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}(I_n)$$

となることをつぎに従って示せ。

(1) I が有界のときを考える。$I_n = (a_n, b_n]$ としたとき、$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_n > 0$ s.t.

$$J_n = (a_n, b_n + \delta_n],$$

$$\tilde{m}(J_n) \leq \tilde{m}(I_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \ (n = 1, 2, \cdots),$$

を示せ。そして

$$G_n = (a_n, b_n + \delta_n)$$

とおくとき、つぎの Borel-Lebesgue の定理と問 41 を用いて

$$\tilde{m}(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}(I_n)$$

を示せ。

(Borel-Lebesgue の定理) E を $\mathbf{R}^N$ の有界閉集合とする。$\mathbf{R}^N$ の開集合族 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ があって

$$E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

ならば、$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_{n_0} \in \Lambda$ (有限個) s.t.

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} G_{\lambda_n}$$

となる。

(2) I が非有界のときも成り立つことを示せ。

47. 前問を用いて、$\tilde{m}$ が $\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R})$ 上で σ 加法的であることを示せ。また 問 44 で構成した m が $\mathcal{A}_{left}(\mathbf{R})$ 上で σ 加法的であることを示せ。

ここまでのところで、$\mathcal{A}_{left}(\mathbf{R})$ (有限加法族) 上の σ 加法的測度 m で

$$I = (a, b] \in \mathcal{E}_{left}(\mathbf{R}) \Longrightarrow m(I) = \tilde{m}(I) = b - a$$

をみたすものを構成することができた。さらに Carathéodory の方法に従って測度を構成する。

定義 15 集合 X, X の部分集合全体 $\mathcal{P}(X)$ に対して、集合関数 $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ が外測度とはつぎをみたすときをいう。

$$\mu^*(\emptyset) = 0, \tag{1}$$

$$A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B), \tag{2}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j). \tag{3}$$

さて、$A \subset \mathbf{R}$ に対して

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) : A_j \in \mathcal{A}_{left}(\mathbf{R}),\ E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right\}$$

で定義すると、μ^* は外測度であり、

$$\mu^*(A) = m(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}_{left}(\mathbf{R})$$

をみたす (講義のプリントの命題 1.13) 。この μ^* はもはやσ 加法的な性質 (問 45) を持たない (定義 15(3)) 。

定義 16 $A \in \mathcal{P}(X)$ が μ^*-*measurable* とは

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad \forall E \in \mathcal{P}(X)$$

が成立するときをいう。

$A \subset \mathbf{R}$ で

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad \forall E \subset \mathbf{R}$$

をみたすものの全体を $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ とかくと、$\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ は σ 加法族になり、μ^* の $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ への制限

$$\mu(A) = \mu^*(A), \quad A \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$$

は $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ 上の測度となる。さらに、

$$\mathcal{A}_{left}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$$

が成立する (講義のプリントの Carathéodory Theorem, 命題 1.13) 。

以上のことから $(\mathcal{E}_{left}(\mathbf{R}), \tilde{m})$, $(\mathcal{A}_{left}(\mathbf{R}), m)$, $(\mathcal{P}(\mathbf{R}), \mu^*)$ を経て、σ 加法族 $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ 上の測度 μ で

$$\mu(A) = m(A), \quad A \in \mathcal{A}_{left}(\mathbf{R})$$

をみたすものを構成することができた。

前回構成した $(\mathbf{R}, \mathcal{M}_{\mathbf{R}}, \mu)$ を Lebesgue 測度空間という。また μ を Lebesgue 測度、$\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ に属する元を Lebesgue 可測集合という。ここで Lebesgue 測度空間の性質を調べる。

48. Borel 集合 (定義 10 を見よ) は Lebesgue 可測集合である。

49. (1) 1 点からなる集合 $\{a\}$ に対して、$\mu(\{a\}) = 0$.

(2) $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b]) = b - a$.

50. $\mathbf{R}$ の部分集合 A に対して、次の (1), (2), (3) は同値であることを示せ。ただし μ^* は Lebesgue 外測度を表す。

(1) $A \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$.

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists G \supset A$, 開集合 s.t. $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$.

(3) $\exists G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, 開集合列 s.t.

$$H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \quad \mu^*(H \setminus A) = 0.$$

(ヒント： (1) $\Longrightarrow$ (2). まず 外測度の定義から A を 区間の可算和で近似せよ。それぞれの区間は開区間で近似できる。(2) $\Longrightarrow$ (3). (2) において、$\varepsilon = 1/n$ とおいて G_n を作る。$\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ の元については $\mu^* = \mu$ であることに注意して、問 34(4) の結果を用いよ。(3) $\Longrightarrow$ (1). $B = H \setminus A$ とおいて定義 16 に従って $B \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ を導け。)

さて、問 48 により $\mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}}) \subset \mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ であるが、より詳しくは両方のクラスは一致せず、$\forall B \in \mathcal{M}_{\mathbf{R}}, \exists A \in \mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}})$ s.t. $\mu(A \triangle B) = 0$ となることが知られている。すなわち $\mathcal{M}_{\mathbf{R}}$ と $\mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}})$ は Lebesgue 測度 0 の集合だけ違う。

51. (1 学期の復習) 集合 $X \neq \emptyset$ の部分集合からなる有限加法族 $\mathcal{A}$ とその上の σ-加法的な有限加法的測度 m から出発して、$\mathcal{A}$ を含む σ 加法族とその上の測度 μ を構成する過程をつぎの条件に従って (証明を行わずに) 要約せよ。

(1) 300 字以上 600 字以内。

(2) つぎの用語をすべて用い、その定義も記述すること。

有限加法族 $\mathcal{A}$

σ-加法的な有限加法測度 m

外測度 μ^*

μ^*-measurable な集合

σ 加法族 $\mathcal{B}$

測度 μ

定義 17 $(X, \mathcal{B})$ を測度空間とする。$A \in \mathcal{B}$ に対して A 上実数または $\pm\infty$ をとる関数 f が

$$(*) \qquad \forall a \in \mathbf{R} \Longrightarrow \{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{B}$$

をみたすとき、f を A 上の可測関数といい、$A = X$ のとき単に可測関数という。以下、$A = X$ のとき $\{x \in A : f(x) < a\}$ を $\{f < a\}$ と書く。

52. 条件 $(*)$ は次の条件とそれぞれ同値であることを示せ.

$$(1) \qquad \forall a \in \mathbf{R} \Longrightarrow \{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{B}$$

$$(2) \qquad \forall a \in \mathbf{R} \Longrightarrow \{x \in A : f(x) \leq a\} \in \mathcal{B}$$

$$(3) \qquad \forall a \in \mathbf{R} \Longrightarrow \{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{B}$$

53. f, g が可測関数、$\alpha \in \mathbf{R}$ ならば、αf, $f+g$ も可測関数であることを示せ。

54. f_n $(n \geq 1)$ を可測関数列とするとき

$$\sup_{n\geq 1} f_n, \qquad \overline{\lim} f_n$$

は可測関数であることを示せ。

定義 18 $(X, \mathcal{B})$, $(Y, \mathcal{F})$ を *2* つの測度空間とする。$f : X \longrightarrow Y$ が次の条件をみたすとき、f を可測写像であるという。

$$\forall B \in \mathcal{F} \Longrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}.$$

55. $(X, \mathcal{B})$, $(Y, \mathcal{F})$, $(Z, \mathcal{M})$ をそれぞれ測度空間とする。$f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ が可測のとき、$(g \circ f)(x) := g(f(x))$ で定義される合成写像 $g \circ f : X \longrightarrow Z$ もまた可測となることを示せ。

56. 測度空間 $(X, \mathcal{B})$ における実数値可測関数 f を写像 $f : (X, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}}))$ とみなすとき f は定義 18 の意味で可測であることを示せ。逆に、写像 $f : (X, \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}}))$ が定義 18 の意味で可測ならば定義 17 の意味で可測であることを示せ。

定義 19 定義 17 において、$X=\mathbf{R}^n$ (n 次元ユークリッド空間) 、$\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{O}_{\mathbf{R}^n})$ (n 次元 *Borel class*) に対して、関数 f が条件 $(*)$ をみたすとき f を *Borel* 可測関数といい、$X=\mathbf{R}^n$, $\mathcal{B}=\mathcal{M}_{\mathbf{R}^n}$ (n 次元 *Lebesgue class*) に対して、関数 f が $(*)$ をみたすとき f を *Lebesgue* 可測関数という。

57.

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & x\in\mathbf{Q} \\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} \end{cases}$$

は Lebesgue 可測であることを示せ。

58. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ が連続ならば、Borel 可測かつ Lebesgue 可測であることを示せ。

以下特に断らない限り、可測空間 $(X,\mathcal{B})$ を仮定する。

定義 20 $A_i\in\mathcal{B}$ $(i=1,2,\dots,n)$ *disjoint,* $X=\sum_{i=1}^n A_i$, $a_i\in\mathbf{R}$, $a_i\neq a_j$ $(i\neq j)$ とする。このとき

$$f(x)=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}(x)$$

を階段関数、または単関数という。ただし、χ_{A_i} は A_i の定義関数 (問 15 を見よ) 。

59. 階段関数は可測であることを示せ。

60. 非負可測関数 f に対して、各 $n\geq 1$ ごとに

$$\begin{aligned} &A_{n,j}=\left\{x\in X:\frac{j-1}{2^n}\leq f(x)<\frac{j}{2^n}\right\} \\ &(j=1,2,\dots,n2^n), \\ &B_n=\{x\in X:f(x)\geq n\} \end{aligned}$$

で可測集合を定義し、

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j-1}{2^n} \chi_{A_{n,j}}(x) + n\chi_{B_n}(x)$$

で階段関数列 $\{f_n\}$ をつくる。

(1) f に対して具体的に f_2 を図示せよ。

(2) $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \geq 1)$ かつ $f_n(x) \to f(x)$ $(\forall x)$ $(n \to \infty)$ を示せ。

61. (1) 可測関数 f に対して、

$$f_+ = \max\{0, f\}, \qquad f_- = \max\{0, -f\}$$

は可測であることを示せ。

(2) (1) を用いて、可測関数は階段関数列の各点収束極限として表されることを示せ。

62. 単関数 f, g に対して、$f+g$, αf $(\alpha \in \mathbf{R})$, $f \cdot g$, $f \vee g = \max\{f, g\}$ そして $f \wedge g = \min\{f, g\}$ は単関数であることを示せ。

以下、測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を仮定する。

定義 21 f を非負の単関数とする、すなわち

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x), \quad a_i \geq 0.$$

このとき f の X 上の積分を

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

で定義する。$B \in \mathcal{B}$ に対して、f の B 上の積分を

$$\int_B f d\mu = \int \chi_B \cdot f d\mu$$

で定義する。

63. 上の定義において積分の値は f の表現の仕方によらないことを示せ。つまり、別の表現として

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}(x), \quad b_k \geq 0$$

と書けるならば

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \mu(B_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

64. $f, g \geq 0$ を単関数とするとき、$\alpha, \beta \geq 0$ に対して

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu,$$

さらに、$f \geq g$ ならば

$$\int f d\mu \geq \int g d\mu$$

を示せ。

65. $f \geq 0$ を単関数とするとき、$A, B \in \mathcal{B}$ disjoint, に対して

$$\int_{A+B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

を示せ。

66. $f_j \geq 0$ を単関数増加列、$g \geq 0$ も単関数のとき

$$\lim_j f_j \geq g$$

ならば

$$\lim_j \int f_j d\mu \geq \int g d\mu$$

をつぎに従って示せ。

(1) $g > 0$ の場合のみ示せばよいことを証明せよ。

(2) $g > 0$, $\mu(X) < \infty$ のときを考える。

$$g = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}, \quad b_k > 0$$

とおいて、$0 < \varepsilon < \min_{1 \leq k \leq m} b_k$ に対して

$$A_j = \{f_j > g - \varepsilon\}$$

とおくとき、$A_j \nearrow X$ を示し、

$$\int f_j d\mu \geq \int g d\mu - \max_{1 \leq k \leq m} b_k \cdot \mu(X \setminus A_j) - \varepsilon \mu(X)$$

を示せ。そして、この 2 つの結果から結論を導け。

(3) $g > 0$, $\mu(X) = \infty$ の場合を考える。

$$\int f_j d\mu \geq (-\varepsilon + \min_{1\leq k\leq m} b_k)\mu(A_j)$$

を示し、これより結論を導け。

定義 22 f を非負可測関数とする。問 60 により、$\exists f_j$; 単関数列 $s.t.$ $f_j \nearrow f$. そこで f の X 上の積分を

$$\int f d\mu = \lim_{j\to\infty} \int f_j d\mu$$

で定義する。

67. 上の定義において、積分の値は非負単関数列 f_j のとり方によらないことを問 66 を用いて示せ。つまり $\exists g_j$; 単関数列 s.t. $g_j \nearrow f$ ならば

$$\lim_j \int f_j d\mu = \lim_j \int g_j d\mu$$

を示せ。

68. f を非負可測とする。

$$V(f) = \sup\left\{\int \phi d\mu : \phi;\ \text{非負単関数、} 0 \leq \phi \leq f\right\}$$

とおくとき、

$$V(f) = \int f d\mu$$

であることをつぎに従って示せ。

(1) $\int f d\mu \leq V(f)$ を示せ。

(2) $V(f) < \infty$ とする。$V(f)$ の定義から $\forall\varepsilon > 0$ に対して

$$0 \leq \exists\phi_\varepsilon \leq f \text{ s.t. } V(f) - \varepsilon < \int \phi_\varepsilon d\mu$$

が従うが、

$$g_{j,\varepsilon} = \phi_\varepsilon \vee f_j$$

とおくとき

$$g_{j,\varepsilon} \nearrow f, \quad j \to \infty$$

を示せ。これを用いて

$$V(f) \le \int f d\mu$$

を示せ。

(3) $V(f) = \infty$ のとき、(2) に習って結果を導け。

69. $f, g \ge 0$ を可測とする。$\alpha, \beta \ge 0$ に対して

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu,$$

さらに、$f \ge g$ ならば

$$\int f d\mu \ge \int g d\mu$$

を示せ (前半は定義 22 に従って単関数の近似列を作って考えよ、後半は前半の結果から従う) 。

70. (単調収束定理) $f_j \ge 0$ を可測増大列とする。このとき

$$\int \lim_j f_j d\mu = \lim_j \int f_j d\mu$$

を示せ（ヒント：各 j ごとに非負単関数列 $g_{j,i} \nearrow f_j$ が存在する。$h_i = \max_{j \le i} g_{j,i}$ とおくとき、$h_i \le h_{i+1}$, $g_{j,i} \le h_i \le f_i$ を示し、$i \to \infty$, $j \to \infty$ の順に操作して $h_i \nearrow f$ を導く。残りは定義 22 にしたがう) 。

定義 23 $A \in \mathcal{B}$ 上の命題 P が $\mu(A_0) = 0$ なる $A_0 \subset A$ 以外で成立しているとき、A 上ほとんど至るところ（ *almost everywhere* ）P であるといい、P *a.e. in* A と書く。

71. f が非負可測のとき、

$$\int f d\mu = 0 \Longrightarrow f = 0 \text{ a.e.}$$

を示せ。

定義 24 f を一般の可測関数とする。

$$f_+ = \max\{0, f\}, \qquad f_- = \max\{0, -f\}$$

とおくと、問 61 により $f_\pm$ は非負可測関数であり $f = f_+ - f_-$. そこで

$$\int f_+ d\mu, \qquad \int f_- d\mu$$

のうち少なくとも一方が有限のとき

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$$

で f の積分を定義する。この積分が有限のとき f は可積分であるという。

定義 25 $X = \mathbf{R}^n$, $\mathcal{B}$ を *Lebesgue class*, μ をその上の *Lebesgue* 測度としたとき、$A \in \mathcal{B}$ 上の *Lebesgue* 可測関数 f に対して $\int_A f d\mu$ を *Lebesgue* 積分といい $\int_A f dx$ と書くのが一般的である。

72. f が可積分 $\Longleftrightarrow$ $|f|$ が可積分、を示せ。

73. f を可測、$A, B \in \mathcal{B}$ disjoint とする。f が A 上 B 上ともに可積分ならば f は $A+B$ 上可積分で

$$\int_{A+B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

となることを示せ。

74. f, g を可積分とするときつぎのことを示せ。

(1)

$$\mu(A) = 0 \Longrightarrow \int_A f d\mu$$

(2)

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

(3)

$$f \geq g \ \text{ a.e.} \Longrightarrow \int f d\mu \geq \int g d\mu.$$

(4) $h = f$ a.e. ならば h は可積分で

$$\int h d\mu = \int f d\mu.$$

(5)

$$\int |f| d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \ \text{ a.e.}.$$

(6) 任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\int_A f d\mu = 0$$

であるための必要十分条件は $f = 0$ a.e..

75. f が可積分ならば $\mu(\{f = \pm\infty\}) = 0$, すなわち f はほとんど至るところ有限であることを示せ。

76. f,g が可積分、$\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ ならば $\alpha f+\beta g$ も可積分で

$$\int(\alpha f+\beta g)d\mu=\alpha\int fd\mu+\beta\int gd\mu$$

となることを示せ。

77. f は可測、h は可積分な非負関数とする。$|f|\le h$ ならば f は可積分で

$$\int|f|d\mu\le\int hd\mu$$

を示せ。

78. $\mu(X)<\infty$ 、f が有界な可測関数ならば f は可積分であることを示せ。

ヒント． **71.** $\{f>0\}=\cup_n\{f>1/n\}$ を使い、$\mu(\{f>1/n\})=0$ を示せ。

73. まず問 65 から f が非負可測の場合に成立することを示せ。

74.(1) f が単関数のとき、非負可測のとき、一般のときの順に定義に戻って示す。

74.(3) 問 74(1) を用いよ。

74.(4) まず領域の分割を使って h が可積分であることを示せ。後は前問を用いよ。

74.(5) 問 74(4), 問 71 を用いよ。

74.(6) $\Longrightarrow$ は特に $A=\{f>0\},\{f<0\}$ として考えよ。$\Longleftarrow$ は問 73 の分割に関する結果を用いよ。

75. 問 71 と同じ考え方をせよ。

79. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ が非負 Lebesgue 可測なとき、$y \in \mathbf{R}$ に対して

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_{\mathbf{R}} f(x+y)dx = \int_{\mathbf{R}} f(-x)dx$$

となることを示せ。

定理（Riemann 積分と Lebesgue 積分の関係）$[a,b]$ 上の有界関数 f が Riemann 積分可能ならば Lebesgue 積分可能であってそれぞれの値は一致する。

80. $[0,\infty)$ 上の非負連続関数 f に対して、広義 Riemann 積分の値は Lebesgue 積分の値に一致することを前の定理を用いて証明せよ。

81. f は $(0,\infty)$ で連続とする。$|f|$ が $(0,\infty)$ で広義 Riemann 積分可能ならば f は $(0,\infty)$ で Lebesgue 積分可能で

$$\int_0^\infty f d\mu = (\text{Riemann の意味の}) \int_0^\infty f dx$$

であることを証明せよ。

82. 関数 $f(x) = \sin x/x \ \ (x \geq 0)$ を考える。

(1) f のグラフを書け。

(2)

$$\int_{[0,\infty)} \left| \frac{\sin x}{x} \right| d\mu = \infty$$

を示せ。

(3) f は Riemann の意味で

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

であるが、Lebesgue 積分可能でないことを示せ。

補題 (Fatou's lemma) $f_n \geq 0$ を可測とするとき

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

が従う。

83. Fatou's lemma において等号が成立しない例を挙げよ。

定理 (Lebesgue's convergence theorem) f_n を可測とする。ある可積分な $g \geq 0$ が存在して、$|f_n| \leq g$ a.e. のとき、$f_n \to f$ a.e. ならば f は可積分であって

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

が従う。

84. $f_n \geq 0$ を可測として、$f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq 0$, $\int f_1 d\mu < \infty$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu$$

を示せ。

85. $\mu(X) < \infty$ とする。可測関数列 f_n が $f_n \to f$ a.e. であって、$\exists M > 0$ s.t. $|f(x)| \leq M$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ならば f は可積分で、

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

となることを示せ。

86. $\mu(X) < \infty$ なる X 上で f_n は可積分で $f_n \to f$(一様収束) ならば、f は可積分で

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n d\mu = \int f d\mu$$

となることを示せ。

87. f_n が $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ をみたし、$f_n \to f$ とする。もし $p \geq 1$ に対して

$$\int \varphi^p d\mu < \infty$$

ならば

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|^p d\mu = 0$$

を示せ。

88. f を $[0, \infty)$ 上の有界な連続関数とするとき、つぎの値を求めよ。

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-nx} f(x) dx$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty n e^{-nx} f(x) dx$$

89. $\mathbf{R}$ 上で f が Lebesgue 可積分のとき

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

は $\xi \in \mathbf{R}$ の連続関数になることを示せ。f がさらに

$$\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)| dx < \infty$$

をみたすならば、$\hat{f}(\xi)$ は ξ について C^1 級であることを示せ。 ただし、$i = \sqrt{-1}$.

90. 可測関数列 f_n が

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n|d\mu < \infty$$

ならば $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は a.e. で収束し

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n d\mu$$

が成立することを示せ。

91. $\mu(X) < \infty$ とする。$f_n \to 0$ a.e. かつ任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在して$\mu(A) < \delta$ をみたすすべての $A \in \mathcal{B}$ は

$$\sup_{n\geq 1}\int_A |f_n|d\mu < \varepsilon$$

であるならば

$$\lim_{n\to\infty}\int |f_n|d\mu = 0$$

であることを示せ。

92. f_n, f を $\mathbf{R}$ 上の可積分な非負関数で、つぎの 2 条件を満たすとする。

(A) $$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx,$$

(B) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \ (\forall x) \ \ (\text{各点収束}).$$

このとき (1), (2) を証明せよ。

(1) $$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} (f(x) - f_n(x))_+ dx = 0$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} |f(x) - f_n(x)|dx = 0$$

93. $[0,\infty)$ 上の可積分関数列 f_n が

(i) $$|f_n| \leq 1 \ \text{ a.e.},$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \ \text{ a.e..}$$

をみたすとき、つぎの問に答えよ。

(1)

(I) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = 0$$

が成立しない例を挙げよ。

(2)

$$C = \sup_{n\geq 1}\int_0^\infty |f_n(x)|xdx < \infty$$

のとき、$\forall N > 0$ について

$$\int_N^\infty |f_n(x)|dx \leq \frac{C}{N}$$

が成立することを示せ。さらに、この結果を用いて (I) が成立することを示せ。

ヒント

79. 単関数の近似列を作って考える。

80. 単調収束定理。

81. 前半は問 80 をそのまま使う。後半は $\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$ として前問を使う。

82. 微積分の本を参照。例えば、「"独修　微分積分学"　現代数学社　梶原壌二著」の 188 ページ。

83. 単関数列 $f_n = a_n \chi_{A_n}$ で見つける。

86. $\exists N$ s.t. $|f_n| \leq |f_N| + 1$ $(n \geq 1)$ を示す。

87. $|f| \leq \varphi$ を示し、Lebesgue's theorem.

88. (1) 0, (2) $f(0)$, 変数変換 $nx = x'$.

89. 後半はつぎの積分と微分の交換に関する定理を用いる。

定理 $f(x, \xi)$ を $x \in X$ について可積分、$\xi \in \mathbf{R}$ について微分可能とする。$\left|\frac{d}{d\xi} f(x, \xi)\right| \leq \varphi(x)$: 可積分ならば、$\int f(x, \xi) d\mu(x)$ は ξ で微分可能で

$$\frac{d}{d\xi} \int f(x, \xi) d\mu(x) = \int \frac{d}{d\xi} f(x, \xi) d\mu(x).$$

90. 前半は単調収束定理から $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu$ を示し、問 75 を用いる。後半は $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ とおいて $S_N \to \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a.e., $|S_N| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ を示し、Lebesgue's theorem を用いる。

91. $B_n = \cap_{i=n}^{\infty} \{|f_i| \leq 1\}$ とおく。まず$\mu(\{\lim_{n\to\infty} f_n \neq 0\}) = 0$ から $\mu(B_n^c) \to 0$ を示す。つぎに問の条件を用いて、$\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $\sup_{n \geq 1} \int_{B_N} |f_n| d\mu < \varepsilon$ を示す。最後に $\int |f_n| d\mu = \int_{B_N} |f_n| d\mu + \int_{B_N^c} |f_n| d\mu$ と分けて、第一項に対して Lebesgue's theorem を用いる。

92. (1) $(f-f_n)_+ \le f$ を導き、Lebesgue' theorem. (2) $(f-f_n)_- = (f_n - f) + (f-f_n)_+$ を使って$\int (f-f_-)d\mu \to 0$ を示す。

93. (1) 単関数列 $f_n = a_n \chi_{A_n}$ で見つける。(2) 前半は与えられた C の式を変形する。後半は$\int_0^\infty f_n d\mu = \int_0^N f_n d\mu + \int_N^\infty f_n d\mu$ に分けて考える。

さて、ここからは積分順序の交換に関する定理 (Fubini's theorem) を述べる。

2 つの完備測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu_1), (Y, \mathcal{F}, \mu_2)$ はそれぞれ $\exists \{X_k\}$, $\{Y_k\}$ s.t.

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X, \ \ X_k \in \mathcal{B}, \ \ \mu_1(X_k) < \infty, \ \ \lim_{k\to\infty} X_k = X.$$

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y, \ \ Y_k \in \mathcal{B}, \ \ \mu_2(Y_k) < \infty, \ \ \lim_{k\to\infty} Y_k = Y.$$

をみたすとする。例えば、$X = \mathbf{R}^n$ の Lebesgue 測度空間は

$$X_k = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < k\}$$

とおくと、この条件を満たす。このとき直積測度空間 $Z = X \times Y$ を定義することができて、それを完備化したものを $(Z, \mathcal{M}, \mu)$ とする。例えば $X = \mathbf{R}^n, Y = \mathbf{R}^m$ として Lebesgue 測度空間を考えると $Z = \mathbf{R}^{n+m}$ (Lebesgue 測度空間) となる。このとき、つぎの定理が成立する。

定理 (Fubini's theorem)

(1) $f(z) = f(x,y)$ が Z 上の $\mathcal{M}$-可測で、 $f(z) \ge 0$ a.e. とする。このとき、つぎに現れる積分はすべて定義可能であって

$$\begin{aligned}\int_Z f(z)d\mu(z) &= \int_X d\mu_1(x) \int_Y f(x,y)d\mu_2(y) \\ &= \int_Y d\mu_2(y) \int_X f(x,y)d\mu_1(x)\end{aligned}$$

が従う。

(2) $f(z)=f(x,y)$ が Z 上の $\mathcal{M}-$ 可測で、可積分ならば、つぎに現れる積分はすべて定義可能であって

$$(*)\qquad \int_Z f(z)d\mu(z) = \int_X d\mu_1(x)\int_Y f(x,y)d\mu_2(y) = \int_Y d\mu_2(y)\int_X f(x,y)d\mu_1(x)$$

が従う。

94. $f(z)=f(x,y)$ が Z 上 $\mathcal{M}$-可測であって、

$$\int_Z |f(z)|d\mu(z),\ \int_X d\mu_1(x)\int_Y |f(x,y)|d\mu_2(y),$$
$$\int_Y d\mu_2(y)\int_X |f(x,y)|d\mu_1(x)$$

のどれか 1 つが有限ならば、他の 2 つも有限であって上の定理の主張 $(*)$ が成立することを、定理を用いて、示せ。

95. $f(x)$, $g(x)$ が $\mathbf{R}^n$ で可積分ならば、a.e. x に対して

$$h(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

は有限な値をとり、$\mathbf{R}^n$ で可積分であることを示せ。

96. $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$ に対して $x\cdot\xi = x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n$ と定めるとき、$\mathbf{R}^n$ 上の可積分な関数 $f(x)$ に対して

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx \quad (i=\sqrt{-1})$$

とおく。h を前問で定義した関数とするとき、

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

を示せ。

以下において $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし、特に断らない限り、扱う関数は X 上可測とする。ただし、$f = g$ a.e のとき f と g は同じ関数であると考える。

定義 26 $1 \leq p < \infty$ とするとき、

$$\int |f|^p d\mu < \infty$$

をみたす f の全体を L^p と表す。$f \in L^p$ に対して

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

とおく。

定義 27

$$|f(x)| \leq \alpha \qquad a.e.$$

をみたすような定数 $\alpha > 0$ が存在する f の全体を L^∞ と表す。$f \in L^\infty$ に対して

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 : |f(x)| \leq \alpha \quad a.e.\}$$

とおく。

97. $f \in L^\infty$ ならば $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ a.e. をみたすことを示せ。

98. $X = \mathbf{R}$ (1 次元 Lebesgue 測度空間) の場合を考える。$1 \leq p \leq \infty$ をみたす p を 1 つ固定する。$\chi_A(x)$ を $A(\subset \mathbf{R})$ の定義関数とし、$\sigma \in \mathbf{R}$ とするとき、つぎの問いに答えよ。

(1)

$$f(x) = \chi_{(1,\infty)}(x)\, x^\sigma$$

が L^p に属するための、σ に関する、必要十分条件を求めよ。

(2)

$$g(x) = \chi_{(0,1)}(x)\, x^\sigma$$

が L^p に属するための、σ に関する、必要十分条件を求めよ。

つぎの不等式はヘルダー (Hölder) の不等式と呼ばれる: $p > 1$ とし、q は $1/p + 1/q = 1$ をみたすとする。任意の $f \in L^p$, $g \in L^q$ に対して

$$\int |fg| d\mu \leq \left\{\int |f|^p d\mu\right\}^{1/p} \left\{\int |f|^q d\mu\right\}^{1/q}$$

が成り立つ。

99. $\mu(X) < \infty$ とする。$1 \le q \le p \le \infty$ ならば $L^p \subset L^q$ であることを Hölder の不等式を用いて示せ。

100. 前問において、$\mu(X) < \infty$ の条件をはずすと結論が成り立たないことを反例によって示せ。

101. $1 \le q \le p \le \infty$ ならば $L^q \cap L^\infty \subset L^p$ を示せ。

102. $\mu(X) < \infty$ とする。

(1) $f \in L^\infty$ に対して

(∗)
$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

が成り立つことを示せ。

(2) $f \notin L^\infty$ ならば

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \infty$$

となることを示せ (このことにより (∗) は任意の可測関数に対して成立する)。

定義 28 集合 X の元 f, g に対して、和という $f+g(\in X)$ が一意的に定まり、さらに、$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対してスカラー積という $\alpha f(\in X)$ が一意的に定まり、つぎの条件をみたすとき X を**線型空間**という。

(1) $f+g=g+f$.

(2) $(f+g)+h=f+(g+h)$.

(3) 任意の $f, g \in X$ に対して、$f+h=g$ をみたす $h \in X$ がただ *1* つ存在する (この条件により $f+h=f$ をみたす h を 0 で表す)。

(4) $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$.

(5) $\alpha(f+g)=\alpha f+\beta g$.

(6) $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$.

(7) $1 \cdot f=f$.

例えば、ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ は線型空間である。

103. $1 \leq p \leq \infty$ のとき、集合 L^p は線型空間であることを示せ。

定義 29 線型空間 X において、つぎの条件をみたす X 上の関数 $\|\cdot\|$ が定義されているとき、X をノルム $\|\cdot\|$ をもつ**ノルム空間**であるという。

(1) $0 \leq \|f\| < \infty \qquad (f \in X)$.

(2) $\|\alpha f\|=|\alpha|\|f\| \qquad (\alpha \in \mathbf{R},\ f \in X)$.

(3) $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\| \qquad (f, g \in X)$.

(4) $\|f\|=0 \iff f=0$.

例えば、$\mathbf{R}^n$ はノルム $|x|=(\sum_{i=1}^n {x_i}^2)^{1/2},\ \ x=(x_1, \cdots, x_n)$ をもつノルム空間である。

104. $p=1, \infty$ のとき、L^p は $\|\cdot\|_p$ をノルムにもつノルム空間であることを示せ。

105. $1 < p < \infty$ のときも、つぎのミンコフスキー (Minkowski) の不等式により、L^p は $\|\cdot\|_p$ をノルムにもつノルム空間であることを示せ：$p \geq 1$ とするとき、任意の $f, g \in L^p$ に対して

$$\left\{\int |f+g|^p d\mu\right\}^{1/p} \leq \left\{\int |f|^p d\mu\right\}^{1/p} + \left\{\int |g|^p d\mu\right\}^{1/p}$$

が成り立つ。

定義 30 線型空間 X において、任意の $f, g \in X$ に対して非負実数値関数 $d(f,g)$ が定義されつぎの条件をみたすとき、X を距離 d をもつ**距離空間**という。

(1) $d(f,g) = 0 \iff f = g.$
(2) $d(f,g) = d(g,f).$
(3) $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g).$

106. $\|\cdot\|$ をノルムにもつノルム空間 X において

$$d(f,g) = \|f - g\| \qquad (f, g \in X)$$

とおくと、X は d を距離にもつ距離空間であることを示せ (したがって、空間 L^p は距離 $d(f,g) = \|f-g\|_p$ をもつ距離空間になる) 。

定義 31 距離空間 X において、X のコーシー列 $\{f_j\}$, すなわち

$$d(f_j, f_i) \longrightarrow 0, \quad j, i \to \infty$$

をみたす点列 $\{f_j\}$ が必ず X の収束列であるとき、すなわち

$$\exists f \in X \quad s.t. \quad d(f_j, f) \to 0, \quad j \to \infty$$

であるとき、X を距離 d に関して**完備**であるという。例えば、$\mathbf{R}^n$ は距離 $d(x,y) = |x-y|$ に関して完備である (微積分の公理) 。

107. 空間 L^∞ は距離 $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$ 関して完備であることを示せ。

108. $1 \leq p < \infty$ のとき、空間 L^p は距離 $d(f,g) = \|f-g\|_p$ 関して完備であることを示せ。

109. f_n を L^p の列とする。$f \in L^p$ として $\|f - f_n\|_p \to 0$ をみたすとする。ただし $1 \le p < \infty$. このとき、ある部分列 $\{f_{n(k)}\}$ が存在して、$f_{n(k)}(x) \to f(x)$ a.e. x であることを (問108の証明と同じようにして) 示せ。

110. $C([0,1])$ を閉区間 $[0,1]$ 上で連続な関数の全体とする。$C([0,1])$ は距離

$$d(f,g) = \|f - g\|_1 = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

をもつ距離空間であるが、完備ではないことを示せ。

111. $f_n, f \in L^p$ で $\|f - f_n\|_p \to 0$ であり、かつ $g_n, g \in L^q$ で $\|g - g_n\|_q \to 0$ とする。ただし $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ とする。このとき $\|f_n g_n - fg\|_1 \to 0$ となることを示せ。

実解析 I 演習　1 学期期末試験問題 $'96.6.28$

[1] (1) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を有界な実数列とするとき

$$\underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n \leq \underline{\lim}(a_n + b_n)$$

を示せ。

(2) $A_n \supset A_{n+1}$ をみたす集合列 A_n に対して

$$\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$$

を示せ。

[2] X を有限集合とする。X の部分集合からなる有限加法族は σ-加法族であることを示せ。

[3] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間、Y を空でない集合、f を X から Y への写像とする。

(1)

$$\mathcal{F} = \left\{ B : f^{-1}(B) \in \mathcal{B} \right\}$$

は Y の σ-加法族であることを示せ。

(2)

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B))$$

は $\mathcal{F}$ 上の測度となることを示せ。

[4] $\mathbf{R}$ の集合族

$$\mathcal{E} = \{(a, b] : -\infty < a < b < \infty\}$$

が生成する σ 加法族 $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ は Borel 集合全体と一致することを示せ。ただし、$\mathbf{R}$ の任意の開集合は可算個の有界な開区間の和集合として表されるという結果は用いてよい。

[5] X を空でない集合、μ^* をその上の外測度とする。すなわち、$\forall A \subset X$ に対して $0 \le \mu^*(A) \le \infty$ がただ一つ決まり、つぎの条件をみたす。

(1) $$\mu^*(\emptyset) = 0,$$

(2) $$A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B),$$

(3) $$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

このとき、$E \subset X$ に対するつぎの主張は同値であることを示せ。

(A) $$\forall C_1 \subset E,\ \forall C_2 \subset E^c$$

$$\Longrightarrow \mu^*(C_1 + C_2) = \mu^*(C_1) + \mu^*(C_2).$$

(B) $$\forall A \subset X$$

$$\Longrightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

実解析 I 演習　2 学期期末試験問題 ′96.11.22

[1] つぎのような $\mathbf{R}$ 上の関数 φ を考える.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

ただし, $\mathbf{Q}$ は有理数全体を表す.

(1) 関数 φ は Lebesgue 可測であることを示せ.

(2) 関数 φ は Riemann 積分可能であるか? 可能ならば値を求めよ, 可能でないならば理由を述べよ.

(3) 関数 φ は Lebesgue 積分可能であるか? 可能ならば値を求めよ, 可能でないならば理由を述べよ.

[2] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間, f をその上の可測関数とする.

(1) $\varepsilon > 0$, $p > 0$ に対して

$$\mu(\{|f| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f|^p d\mu$$

が成り立つことを示せ.

(2) (1) を用いて, X 上可積分な関数はほとんど至るところ有限であることを示せ.

[3] $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする．f を X 上の可積分関数とするとき，

$$\int_X |f - \varphi_n| d\mu \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

をみたす単関数列 φ_n が存在することを示せ．