以下において 特に断らない限り (X, d) は距離空間，A, B, M は X の部分集合とする．問題の中で用いる記号は講義の中のそれと同じである．また，命題を否定するときは反例を挙げよ．

1. １次元ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^1, d^{(1)})$ において，次の各集合 A に対して A^c, A^i, A^e, A^f, A^d, $\overline{A}$, $\delta(A)$ (A の直径) を求めよ．
   (1) $A = \{0\} \cup (1, 2]$ (2) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n = 1, 2, \dots\}$ (3) $A = \{\frac{m}{n} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;\ n = 1, 2, \dots\}$
2. 一次元ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^1, d^{(1)})$ における集合
   $$A = \left\{ m + \frac{1}{2n} : m, n = 1, 2, 3, \cdots \right\}$$
   と自然数全体 $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ について，$\boldsymbol{N} \not\subset A$ かつ $\boldsymbol{N} \subset \overline{A}$ を示せ．
3. 次の命題は同値であることを示せ．
   (1) $a \in A^i$
   (2) $a_j \to a$ $(j \to \infty)$ をみたす任意の点列 a_j について $\exists j_0 \geqq 1$ s.t. $a_j \in A$ $(j \geqq j_0)$.
4. 次の命題は同値であること示せ．
   (1) a が集合 A の孤立点である．
   (2) A の点列 a_n が $a_n \to a$ ならば $\exists n_0$ s.t. $\forall n \geqq n_0$, $a_n = a$.
5. 部分集合 $A, B \subset X$ について，$A^i \cup B^i \subset (A \cup B)^i$ を示せ．$A^i \cup B^i \supset (A \cup B)^i$ は成り立つか．成立するならば証明を，そうでない場合は反例を挙げよ．
6. 部分集合 M について，M^i (M の内部) は M に含まれる最大の開集合であることを示せ．
7. 部分集合 M について，$\overline{M}$ (M の閉包) は M を含む最小の閉集合であることを示せ．
8. $X = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \}$, X 上の距離 d を次で与える：$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$
   (1) $B(0; 1)^i$ を求めよ．$B(0; 1)^i = \{x \in X : d(0, x) < 1\}$ であるか．
   (2) $B(0; 1)^f$ を求めよ．$B(0; 1)^f = \{x \in X : d(0, x) = 1\}$ であるか．
   (3) $B(0; 1)^e$ を求めよ．$B(0; 1)^e = \{x \in X : d(0, x) > 1\}$ であるか．
9. ド・モルガンの定理 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示せ．
10. １次元ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^1, d^{(1)})$ の有界閉集合 A と（有界とは限らない）閉集合 B が $A \cap B = \emptyset$ とする．このとき，$d(A, B) > 0$ を示せ．A の有界性が無いとき，同じ結果が成り立つか．成立するならば証明を，そうでない場合は反例を挙げよ．
11. $x \in A^e$ と $d(x, A) > 0$ は同値であることを示せ．
12. $d(A, B) = \inf\{d(x, B) : x \in A\} = \inf\{d(y, A) : y \in B\}$ を示せ．
13. A が有界ならば $\overline{A}$ も有界であることを示せ．より詳しく，$\delta(A) = \delta(\overline{A})$ を示せ．
14. (a) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0$ を導け．
    (b) A, B は閉集合，かつ $A \cap B = \emptyset$ とする．X 上の関数 $f(x) = d(x, A) + d(x, B)$ は $f(x) > 0$ $(\forall x \in X)$ をみたすことを示せ．もし，$A \cap B = \emptyset$ で，A, B の一方が閉集合でない場合，一般に同じ結論が得られるか．
15. 距離関数 d に対して $d_1(x, y) = \min\{1,\ d(x, y)\}$ は X 上の距離関数になることを示せ．
16. ２つの距離空間の間の関数 $f\colon (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ がある．f の連続性に関して，次の２つの主張は同値であることを示せ．
    (1) X_2 の任意の開集合 O_2 について，f の逆像 $f^{-1}(O_2)$ は X_1 の開集合である．
    (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $B_1(x; \delta) \subset f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon))$.

17. (X, d_1), (Y, d_2) を距離空間，$f : X \to Y$ を写像とする．次は同値であることを示せ．
(1) f は連続である．
(2) X の点列 x_j が X の点 x に収束すれば Y の点列 $f(x_j)$ は Y の点 $f(x)$ に収束する．

18. $X = C[a, b]$ は $[a, b]$ 上連続な実数値関数の全体とし，X 上の距離 d を $d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x, y \in [a, b]\}$ で与える．このとき，問 17 の (2) に従って

$$\varphi(f) = \int_a^b f(t)dt \quad （f \text{ の } [a,b] \text{ 上の定積分}）$$

は X 上の連続関数であることを示せ．

19. 次の命題が同値であることを示せ．
(1) (X, d) は点列コンパクト
(2) X は有限集合であるか，または X の任意の無限部分集合は X に属する集積点を少なくとも 1 つもつ．

20. (a) 部分集合 O が開集合であることの定義を述べよ．
(b) 開集合の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，その和集合 $\cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ は開集合であることを示せ．また，共通部分 $\cap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ は一般に開集合であるか．

21. (a) 点列 $\{x_n\}$ はコーシー列である．$\{x_n\}$ のある部分列 $\{x_{n_j}\}$ が $d(x_{n_j}, x) \to 0$ $(j \to \infty)$ をみたす．このとき，$x_n \to x$ $(n \to \infty)$ を示せ．
(b) X が点列コンパクトならば完備であることを示せ．

22. (a) 部分集合 U が 点 a の近傍であることの定義を述べよ．
(b) a の近傍の全体（近傍系）$V(a)$ に対して，$V^*(a)$ が基本近傍系であることの定義を述べよ．
(c) $\mathcal{U} = \{B(a; \varepsilon) : \varepsilon > 0,\ \varepsilon \text{ は有理数 }\}$ は a の基本近傍系であることを示せ．

23. $(X_1, d_1) = (X_2, d_2) = (\mathbf{R}^1, d^{(1)})$, $f(x) = x^2$ に対して，f が連続であることを問 16 の (2) に従って示せ．

24. (X, d) は完備とする．このとき次の命題は同値であることを示せ．
(1) X の部分集合 M が完備である．
(2) M は X の閉集合である．

25. (a) X が全有界であることの定義を述べよ．
(b) X が全有界ならば有界を導け．

26. (a) X がコンパクトであることの定義を述べよ．
(b) X がコンパクトならば，どんな点列 $\{x_n\}$ についても，$\exists x \in X$ s.t. $\forall \varepsilon > 0 \implies \{n : x_n \in B(x; \varepsilon)\}$ は無限集合 であることを示せ．

27. 問 1 の (1) から (3) で与えられる集合はコンパクトであるか否か．

28. 問 8 で与えられる距離空間 (X, d) において，有界閉集合であるがコンパクトではない部分集合 M を挙げ，その証明をせよ．さらに，部分集合 M がコンパクトであるための必要十分条件を求めよ．

29. A を (X, d) のコンパクトな部分集合とする．B を任意の部分集合とするとき，$d(A, B) = d(x_0, B)$ をみたす $x_0 \in A$ が存在することを示せ．

30. A を (X, d) のコンパクトな部分集合とする．B を任意の閉部分集合とする．$A \cap B = \emptyset$ ならば $d(A, B) > 0$ を示せ（問 10 と比較せよ）．

K.U.