

距離の概念

梅津健一郎

平成 17 年 1 月 13 日

目次

1	ユークリッド空間	3
1.1	ユークリッドの距離	3
1.2	ユークリッドの距離の概念	4
2	距離空間	13
2.1	距離空間の定義	13
2.2	距離空間の概念	16
2.3	同値な距離	18
2.4	集合と距離	18
2.5	近傍	21
2.6	連続写像	23
3	完備距離空間	26
3.1	完備距離空間の具体例	26
3.2	完備距離空間における縮小写像	30
4	全有界距離空間	32
5	コンパクト距離空間	37
5.1	コンパクト距離空間の同値条件	40

1 ユークリッド空間

1.1 ユークリッドの距離

実数の全体 \mathbb{R} は数直線と同一視でき，自然に距離 $|x - y|$ が導入される．これを多次元に拡張する．

\mathbb{R} の n 個の直積

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$$

を考える． \mathbb{R}^2 は平面座標と同一視でき， \mathbb{R}^3 は空間座標と同一視できる． \mathbb{R}^2 には三平方の定理により次のように自然に距離が入る． $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d^{(2)}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad [\mathbb{R}^2 \text{ の距離}]$$

一般の \mathbb{R}^n においては次のように距離を導入する． $x = (x_j)_{j=1}^n, y = (y_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$d^{(n)}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

これを \mathbb{R}^n の距離，またはユークリッドの距離という． $(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ を n 次元ユークリッド空間という．

距離 $d^{(n)}$ は次の性質をもつ．

[D1] $d^{(n)}(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, d^{(n)}(x, y) = 0 \iff x = y.$

[D2] $d^{(n)}(x, y) = d^{(n)}(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$

[D3] $d^{(n)}(x, y) \leq d^{(n)}(x, z) + d^{(n)}(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n.$ [三角不等式]

[D1], [D2] は自明¹．[D3] を示す²．シュワルツの不等式による．

$$a, b \in \mathbb{R}^n \implies a \cdot b \leq |a||b|.$$

¹導け．

² $n = 2$ のときは三角形の辺の長さの関係を表す．

$$\begin{aligned}
d^{(n)}(x, y) &= \sum_j (x_j - y_j)^2 \\
&= \sum_j (x_j - z_j + z_j - y_j)^2 \\
&= \sum_j (x_j - z_j)^2 + (z_j - y_j)^2 + 2(x_j - z_j)(z_j - y_j) \\
&\leq \sum_j (x_j - z_j)^2 + \sum_j (z_j - y_j)^2 + 2\sqrt{\sum_j (x_j - z_j)^2} \sqrt{\sum_j (z_j - y_j)^2} \\
&= \left(\sqrt{\sum_j (x_j - z_j)^2} + \sqrt{\sum_j (z_j - y_j)^2} \right)^2
\end{aligned}$$

■

注意 1.1 シュワルツの不等式を導け .

1.2 ユークリッドの距離の概念

定義 1.1 点 $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$B_n(a; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n : d^{(n)}(a, x) < \varepsilon\}$$

を中心 a , 半径 ε の開球体という .

問題 1.1 $n = 1, 2$ の開球体を図示せよ .

定義 1.2 部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ と点 $a \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$B_n(a; \varepsilon) \subset M$$

が成り立つとき, a は M の内点であるという . 内点の全体を内部といい, M^i で表す .

注意 1.2 このとき $a \in M^i$ であるので, a が内点とは a を含む球が M に含まれることを意味する .

問題 1.2 内点の概念図を書け .

問題 1.3 $M^i \subset M$ を示せ .

定義 1.3 部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ について, その補集合 $M^c := \mathbb{R}^n \setminus M$ の内点を M の外点という . 外点の全体を外点といい, M^e で表す .

注意 1.3 このとき, $a \in M^c$ であるので, a が M の外点とは a を含む球が M^c に含まれることを意味する.

外点を厳密に意味づけると

命題 1.1

$$a \in M^e \iff \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B_n(a; \varepsilon) \cap M = \emptyset.$$

問題 1.4 次の主張を示せ.

- (1) $M^e = (M^c)^i$
- (2) $M^e \subset M^c$
- (3) $M^i \cap M^e = \emptyset$

定義 1.4 部分集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ について, \mathbb{R}^n の点で M の内点でもなく, 外点でもない点を境界点という. 境界点の全体を境界といい, M^f で表す.

内部, 外部, 境界の定義から直ちに

命題 1.2 $\mathbb{R}^n = M^i \cup M^e \cup M^f$ は disjoint union.

境界点を厳密に意味づけると

命題 1.3

$$a \in M^f \iff \forall \varepsilon > 0, B_n(a; \varepsilon) \cap M \neq \emptyset \wedge B_n(a; \varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset$$

証明 a が内点でないならば

$$\forall \varepsilon > 0, B_n(a; \varepsilon) \not\subset M$$

である. これは $B_n(a; \varepsilon) \cap M^c \neq \emptyset$ を意味する. 同様にして, a が外点でないならば後半の主張が得られる.

問題 1.5 \mathbb{R} において, 4つの区間 $[0, 1], (0, 1), (0, 1], [0, 1)$ の内部, 外部, 境界を決定せよ.

内部, 外部, 境界について次の直感的に正しいであろう事実が示される.

命題 1.4 $M = B_n(a; \varepsilon)$ に対して次が成立する.

- (1) $M^i = B_n(a; \varepsilon)$
- (2) $M^e = \{x \in \mathbb{R}^n : d^{(n)}(a, x) > \varepsilon\}$
- (3) $M^f = \{x \in \mathbb{R}^n : d^{(n)}(a, x) = \varepsilon\}$: 球面という.

証明 (1) を示す . $M^i \subset B_n(a; \varepsilon)$ は自明 . 逆に $x \in B_n(a; \varepsilon)$ について $d^{(n)}(a, x) < \varepsilon$ であるから

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - d^{(n)}(a, x)}{2}$$

とおくとき³ ,

$$B_n(x; \varepsilon') \subset B_n(a; \varepsilon)$$

である⁴ . よって $x \in B(a; \varepsilon)^i$.

つぎに (2) を示す . まず

$$\{x \in \mathbb{R}^n : d^{(n)}(a, x) > \varepsilon\} \subset M^e$$

を示す . $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : d^{(n)}(a, x) > \varepsilon\}$ を任意に取る .

$$\varepsilon' = \frac{d^{(n)}(a, x) - \varepsilon}{2}$$

とおくと

$$B_n(x; \varepsilon') \subset M^e$$

である⁵ . これは x が M^e の内点であることをいう . ゆえに

$$\{x \in \mathbb{R}^n : d^{(n)}(a, x) > \varepsilon\} \subset M^e.$$

逆に

$$M^e \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d^{(n)}(a, x) > \varepsilon\}$$

であることを示す . そのためには次の補題を示せば十分である .

補題 1.1 $d^{(n)}(a, x) = \varepsilon$ ならば $x \in M^f$.

これを認めると , 次の対偶⁶ が成り立つ .

Claim 1.1

$$d^{(n)}(a, x) \leq \varepsilon \implies x \notin M^e.$$

実際 , 既に見たように $d^{(n)}(a, x) < \varepsilon$ ならば $x \in M^i$ である . Lemma から $d^{(n)}(a, x) = \varepsilon$ ならば $x \in M^f$ である . ゆえに $x \notin M^e$.

³概念図を書け .

⁴実際に検証せよ .

⁵これを示せ .

⁶「 $A \implies B$ 」が成立することと「 B でない $\implies A$ でない」が成立することは同値である .

証明 (Lemma の証明)

a と x を結ぶ直線上に c, c' を次のように取る .

$$c = x + t(a - x), \quad c' = x - t(a - x), \quad t > 0,$$

すると $\forall \delta > 0, B_n(x; \delta)$ は t を小さく取れば c, c' を共に含む . 一方 , 直接の計算から

$$d^{(n)}(a, c) = (1 - t)d^{(n)}(a, x) < \varepsilon,$$

$$d^{(n)}(a, c') = (1 + t)d^{(n)}(a, x) > \varepsilon.$$

これらは

$$B_n(x; \delta) \cap M \neq \emptyset \quad \wedge \quad B_n(x; \delta) \cap M^c \neq \emptyset$$

であることをいう . ゆえに $x \in M^f$. ■

最後に (3) を示す . Lemma により一方は既に得られた . 逆に

$$x \in M^f \implies d^{(n)}(a, x) = \varepsilon$$

を示す . ところが対偶

$$d^{(n)}(a, x) \neq \varepsilon \implies x \notin M^f$$

を考えると , もし $d^{(n)}(a, x) < \varepsilon$ ならば $x \in M^i$ は既に得られているし , $d^{(n)}(a, x) > \varepsilon$ ならば $x \in M^e$ も既に得られているから $x \notin M^f$ は従う . ■

定義 1.5 $A \subset \mathbb{R}^n$ は部分集合 . $\bar{A} = A^i \cup A^f$ を A の閉包という . \bar{A} の元を A の触点という .

命題 1.5 $a \in \bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0, B_n(a; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

証明 $a \in A^e$ の条件の否定を考えればよい . ■

問題 1.6 閉包の概念図を書け .

問題 1.7 $A \subset \bar{A}$ を示せ .

\mathbb{R}^n の点列を定義する .

定義 1.6 無限列 $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ を点列と呼ぶ .

定義 1.7 (点列の収束) 点 $a \in \mathbb{R}^n$ と点列 $\{a_j\}_j$ について, $\forall \varepsilon > 0, \exists j_0 \geq 1$ s.t.

$$j \geq j_0 \implies d^{(n)}(a, a_j) < \varepsilon \quad (a_j \in B_n(a; \varepsilon))$$

が成り立つとき, $a_j \rightarrow a, j \rightarrow \infty$ とかく⁷.

問題 1.8 次を示せ.

$$a \in \overline{M} \iff \exists a_j \in M \text{ s.t. } d^{(n)}(a_j, a) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$$

定義 1.8 x が $A \setminus \{x\}$ の触点である ($x \in \overline{A \setminus \{x\}}$) とき A の集積点という (x の近くに A の点が無数に存在する).

命題 1.6 x が A の集積点であるための必要十分条件は, $\exists x_j \in A$ s.t.

$$\begin{aligned} x_j &\neq x, \\ d(x, x_j) &\rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

定義 1.9 A の集積点の全体を A の導集合といい, A^d で表す. $A \setminus A^d$ の点を A の孤立点という.

注意 1.4 一般に A^d と A の間の包含関係は成り立たない. 例として

$$A = (0, 1] \cup \{2\} \implies A^d = [0, 1].$$

$A \subset \overline{A}$ の補完的な結果として,

命題 1.7

$$\overline{A} = A \cup A^d.$$

証明 $\overline{A} \subset A \cup A^d$ を示す. $x \in \overline{A}$ のとき, $x \notin A$ とせよ. $\exists x_j \in A$ s.t. $x_j \rightarrow x$ であるが, $x_j \neq x$ であることがわかる. ゆえに x が A の集積点である. ■

問題 1.9 $\overline{A} \supset A \cup A^d$ を示せ (trivial!).

A^d については次の包含関係がある.

命題 1.8 $(A^d)^d \subset A^d$. 一般に等号は成り立たない (証明はスキップ).

⁷もしくは $d^{(n)}(a, a^{(j)}) \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$

証明 $a \in (A^d)^d$ とせよ . $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists b \in B(a; \varepsilon) \cap (A^d \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

$B(a; \varepsilon)^i = B(a; \varepsilon)$ であるから , $\exists \varepsilon' > 0$ s.t.

$$B(b; \varepsilon') \subset B(a; \varepsilon).$$

$b \in A^d \setminus \{a\}$ だから $b \in A^d$ かつ $b \neq a$. よって

$$B(b; \exists \varepsilon'') \cap (A \setminus \{b\}) \neq \emptyset \quad \wedge \quad a \notin B(b; \varepsilon'').$$

これは $\varepsilon'' < \varepsilon'$ なる ε'' で実現可能 .

$$\exists a' \in B(b; \varepsilon'') \cap (A \setminus \{b\})$$

であるが , $a' \in A$ かつ $a' \neq a$ である . ゆえに

$$a' \in B(b; \varepsilon'') \cap (A \setminus \{a\}).$$

$$\therefore a' \in B(b; \varepsilon'') \cap (A \setminus \{a\}) \subset B(a; \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}).$$

これは $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$ であることを示す . ■

問題 1.10 この Proposition において等号が成立しない例を挙げよ .

問題 1.11 次を示せ .

$$(1) (A \cap B)^i = A^i \cap B^i$$

$$(2) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$(3) (A \cup B)^d = A^d \cup B^d$$

問題 1.12 前問題において , \cap を \cup にしたとき , \cup を \cap にしたとき包含関係を調べよ .

定義 1.10 (開集合と閉集合) $M \subset \mathbb{R}^n$ について $M^i = M$ のとき M を開集合といい , $\overline{M} = M$ のとき M を閉集合という .

命題 1.9 $(M^i)^i = M^i$, $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$ である . つまり , M^i は常に開集合 , \overline{M} は常に閉集合である .

証明 $(M^i)^i \subset M^i$ は自明 . 逆に $x \in M^i$ ならば $B_n(x; \varepsilon) \subset M$ をみたく $\varepsilon > 0$ がある . 両辺内部を取ると

$$B_n(x; \varepsilon)^i \subset M^i.$$

$B_n(x; \varepsilon)^i = B_n(x; \varepsilon)$ であるから

$$B_n(x; \varepsilon) \subset M^i$$

を得る . これは x が M^i の内点であることをいう .

次に , $\overline{(M)} \supset \overline{M}$ は自明 . 逆に $x \in \overline{(M)}$ ならば $\forall \varepsilon > 0, B_n(x; \varepsilon) \cap \overline{M} \neq \emptyset$. ゆえに $\exists y \in B_n(x; \varepsilon) \cap \overline{M}$. 特に $y \in \overline{M}$. これから $\varepsilon' > 0$ として

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - d^{(n)}(x, y)}{2}$$

とおくとき , $\exists z \in B_n(y; \varepsilon') \cap M$.

$$d^{(n)}(x, z) \leq d^{(n)}(x, y) + d^{(n)}(y, z) < \varepsilon$$

が従うので $z \in B_n(x; \varepsilon)$. 以上から

$$z \in B_n(x; \varepsilon) \cap M.$$

これは $x \in \overline{M}$ であることをいう . ■

例 1.1 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ は開集合 . 一方 , $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ は閉集合 .

問題 1.13 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ は開集合であることを示せ . また , $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ は閉集合であることを示せ .

$M := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ とおく . $\overline{M} \subset M$ を言おう . $M^d \subset M$ を示せば十分 . $x \in M^d$ ならば $\exists x_j \in M$ s.t. $x_j \neq x, d^{(2)}(x, x_j) \rightarrow 0$. よって $|x_1 - x_{1,j}| \rightarrow 0, x_{1,j} \in [a_1, b_1], \forall j$ であるので $x_1 \in [a_1, b_1]$. 同様にして $x_2 \in [a_2, b_2]$. 従って $x = (x_1, x_2) \in M$. ■

定理 1.1 (開集合と閉集合の双対性) $M \subset \mathbb{R}^n$.

$$M : \text{開} \implies M^c : \text{閉}$$

$$M : \text{閉} \implies M^c : \text{開}$$

証明 M が開のとき , $\overline{M^c} = M^c$ を示したい . 特に $\overline{M^c} \subset M^c$ があれば十分 . $x \in \overline{M^c}$ であって $x \notin M^c$ なるものがあると仮定しよう . $x \in M$ で M は開だから $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t.

$$B_n(x; \varepsilon_0) \subset M.$$

ところが $x \in \overline{M^c}$ より, この ε_0 に対して

$$B_n(x; \varepsilon_0) \cap M^c \neq \emptyset.$$

これは矛盾. ■

問題 1.14 後半を示せ.

定義 1.11 \mathbb{R}^n の開集合全体を開集合系といい, $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ で表す.

定理 1.2 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ は次の性質をもつ.

- (i) $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$
- (ii) $O_1, \dots, O_k \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ ならば $\bigcap_{j=1}^k O_j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$
- (iii) $O_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

注意 1.5 一般に可算無限個の開集合の共通部分は開集合ではない.

問題 1.15 反例を挙げよ.

証明 (i) を示す. $(\mathbb{R}^n)^i = \mathbb{R}^n, \emptyset^i = \emptyset$ だから. (ii), (iii) のチェックは容易⁸. ■

定義 1.12 \mathbb{R}^n の閉集合全体を閉集合系といい, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ で表す.

定理 1.3 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ は次の性質をもつ.

- (i) $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$
- (ii) $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ ならば $\bigcup_{j=1}^k A_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$
- (iii) $A_\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \Lambda$ ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

証明 ド・モルガンの定理を用いる⁹.

最後に次を示そう.

例 1.2 $M \subset \mathbb{R}^n$ について, M^i は M に含まれる最大の開集合である. 一方, \overline{M} は M を含む最小の閉集合である.

⁸チェックせよ.

⁹実際に証明を与えよ.

後半を示そう． $M \subset \overline{M}$ であるが， $M \subset F$ かつ F は閉集合としたとき， $\overline{M} \subset F$ を言おう．このとき， $\overline{M} \subset \overline{F}$ であるが， $F = \overline{F}$ なので， $\overline{M} \subset F$. ■

問題 1.16 前半を示せ．

2 距離空間

2.1 距離空間の定義

集合 X において

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{関数}$$

が次の条件をみたすとき, d を X 上の距離関数という.

$$[\text{D1}] \quad d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X. \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

$$[\text{D2}] \quad d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X.$$

$$[\text{D3}] \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X.$$

(X, d) を距離空間という. X の元を点と呼ぶ.

例 2.1 $(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ は距離空間である.

例 2.2 $(\mathbb{R}^n, d_0^{(n)})$ は距離空間である. ただし, $x = (x_j), y = (y_j)$ に対して

$$d_0^{(n)}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

問題 2.1 $d_0^{(n)}$ が三角不等式をみたすことを示せ.

例 2.3 $X = C[a, b]$, 閉区間 $[a, b]$ 上で連続の関数の全体. $\forall f \in X$,

$$\int_a^b |f(x)| dx < \infty.$$

これにより

$$d_i(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx, \quad f, g \in X$$

とおくと (X, d_i) は距離空間である.

問題 2.2 d_i が距離の公理をみたすことを示せ.

例 2.4 \mathbb{R}^∞ の点とは $x = (x_1, x_2, \dots) = (x_j)_{j=1}^\infty, x_j \in \mathbb{R}$ をいう.

$$\ell^2 := \{x = (x_j) \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{j=1}^\infty (x_j)^2 < \infty\}$$

とする. ℓ^2 上で

$$d_\infty(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^\infty (x_j - y_j)^2}$$

を導入する. すると (ℓ^2, d_∞) は距離空間である. これをヒルベルト空間と呼ぶ.

問題 2.3 ℓ^2 に属する点と, 属さない点を上げよ.

三角不等式から

$$|x_n - y_n|^2 \leq (|x_n| + |y_n|)^2 \leq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^2 + |y_n|^2) < \infty.$$

よって $d_{\infty} : \ell^2 \times \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は well-defined である.

d_{∞} が [D1], [D2] をみたすことは明らかである¹⁰から, [D3] 三角不等式を導く. 通常の三角不等式から

$$\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \leq \sum_{j=1}^n (|x_j - z_j| + |z_j - y_j|)^2.$$

シュワルツの不等式から

$$\sum_{j=1}^n |x_j - z_j| |z_j - y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - z_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - y_j|^2}.$$

よって

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (|x_j - z_j| + |z_j - y_j|)^2 \\ & \leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - z_j|^2} \right)^2 + 2 \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - z_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - y_j|^2} + \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - y_j|^2} \right)^2 \\ & = \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - z_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - y_j|^2} \right)^2. \end{aligned}$$

以上から

$$\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - z_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - y_j|^2} \right)^2.$$

平方を取ると

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2} & \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - z_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j - y_j|^2} \\ & \leq d_{\infty}(x, z) + d_{\infty}(z, y). \end{aligned}$$

¹⁰導け.

左辺について $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$d_\infty(x, y) \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y).$$

2.2 距離空間の概念

一般の距離空間にはユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ における概念と同じものが自然に入る。以下, (X, d) を距離空間とする。

$a \in X, \varepsilon > 0$ に対して

$$B(a; \varepsilon) = \{x \in X : d(a, x) < \varepsilon\}$$

を中心 a 半径 ε の開球体 (a の ε -近傍) という。

$A \subset X, a \in X$ に対して, $\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$B(a; \varepsilon) \subset A$$

のとき, a を A の内点という。内点の全体を内部といい, A^i で表す。

$a \in X$ に対して, $\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$B(a; \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

のとき, a を A の外点といい, 外点の全体を外部といい, A^e で表す。

$a \in X$ について, $\forall \varepsilon > 0,$

$$B(a; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \text{かつ} \quad B(a; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$$

のとき, a を A の境界点という。境界点の全体を境界といい, A^f で表す。

明らかに

$$X = A^i \cup A^e \cup A^f.$$

注意 2.1 開球体 $B(a; \varepsilon)$ に対して次の結果は一般には成立しない ($(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ における結果がパラレルに成立しない)。

(1) $B(a; \varepsilon)^i = B(a; \varepsilon)$

(2) $B(a; \varepsilon)^e = \{x \in X : d(a, x) > \varepsilon\}$

(3) $B(a; \varepsilon)^f = \{x \in X : d(a, x) = \varepsilon\}$

特に $X = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

ならば, (X, d) は距離空間になることを示し, (1) から (3) の命題の成否をチェックせよ。

$\forall \varepsilon > 0,$

$$B(a; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

のとき, a を A の触点という。その全体を閉包といい, \bar{A} で表す。

$A \subset X$ に対して, $A^i = A$ のとき A を開といい, $\bar{A} = A$ のとき A を閉という。 A^i は A に含まれる 最大 の開集合で, \bar{A} は A を含む 最小 の閉集合である次の性質も同様に成り立つ。

- $(A^i)^i = A^i$

- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
- A が開ならば A^c は閉
- A が閉ならば A^c は開

(X, d) の開集合全体を開集合系といい, \mathcal{O} で表す. \mathcal{O} は次の条件をみたす.

- $X, \emptyset \in \mathcal{O}$
- $O_1, \dots, O_k \in \mathcal{O} \implies \bigcap_{j=1}^k O_j \in \mathcal{O}$
- $O_\lambda \in \mathcal{O} (\lambda \in \Lambda) \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

(X, d) の閉集合全体を閉集合系といい, \mathcal{C} で表す. \mathcal{C} は次の条件をみたす.

- $X, \emptyset \in \mathcal{C}$
- $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{C} \implies \bigcup_{j=1}^k A_j \in \mathcal{C}$
- $A_\lambda \in \mathcal{C} (\lambda \in \Lambda) \implies \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{C}$

x が $A \setminus \{x\}$ の触点であるとき A の集積点という. A の集積点の全体を A の導集合といい, A^d で表す. $A \setminus A^d$ の点を A の孤立点という. 一般に

$$\begin{aligned}\overline{A} &= A \cup A^d \\ \overline{A} &= A^i \cup A^f \\ (A \cap B)^i &= A^i \cap B^i \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ (A \cup B)^d &= A^d \cup B^d \\ (A^d)^d &\subset A^d\end{aligned}$$

が成立する.

x が A の集積点であるための必要十分条件は, $\exists x_j \in A$ s.t.

$$\begin{aligned}x_j &\neq x, \\ d(x, x_j) &\rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

問題 2.4 $A, A^d, (A^d)^d$ がすべて異なる集合となる A の例を作れ.

問題 2.5 次の包含関係を調べよ.

- (1) $(A \cup B)^i$ と $A^i \cup B^i$
- (2) $\overline{A \cap B}$ と $\overline{A} \cap \overline{B}$
- (3) $(A \cap B)^d$ と $A^d \cap B^d$

2.3 同値な距離

定義 2.1 X に対して 2 つの距離を導入する : $(X, d_1), (X, d_2)$.

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

をみたく $c_1, c_2 > 0$ が存在するとき d_1 と d_2 は同値であるという .

命題 2.1 X における距離 d_1 と d_2 が同値であるとき , (X, d_1) と (X, d_2) の開集合系は一致する . より具体的には , $a_j \rightarrow a$ in (X, d_1) と $a_j \rightarrow a$ in (X, d_2) は同値である .

問題 2.6 点列の収束に関する同値性を ε - N 法で示せ .

例 2.5 $(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ と $(\mathbb{R}^n, d_0^{(n)})$ は同値である . 実際

$$d_0^{(n)}(x, y) \leq d^{(n)}(x, y) \leq \sqrt{n} d_0^{(n)}(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つ .

問題 2.7 これを示せ . $(\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2} \leq n \max\{|x_j - y_j|\})$

問題 2.8 距離空間 (X, d) に対して

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

とおく . このとき

- (1) d' は X 上の距離であるか .
- (2) (X, d) と (X, d') は同値であるか .

2.4 集合と距離

(X, d) を距離空間とせよ . $A \subset X, A \neq \emptyset, x \in X$ に対して

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

を x と A の距離という .

問題 2.9 概念図を書け .

注意 2.2 一般に \inf は \min にできない . $(\mathbb{R}^1, A = (0, 1), x = 2)$

定理 2.1 (1)

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y), \quad x, y \in X.$$

特に $d(\cdot, A)$ は連続である .

(2)

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0.$$

(3)

$$x \in A^i \iff d(x, A^c) > 0.$$

証明 (1) $a \in A$, 三角不等式から

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

右辺で $a \in A$ で \inf を取ると

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A).$$

$$\therefore d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

x と y を入れ替えて

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y).$$

これは

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

を与える .

▽

(2) $x \in \overline{A}$ ならば $\exists x_j \in A$ s.t.

$$d(x, x_j) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

これは

$$\inf\{d(x, y) : y \in A\} = 0$$

であることを意味する . 逆に $d(x, A) = 0$ ならば \inf の定義から明らか .

▽

(3) $x \in A^i$ ならば $\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t.

$$B(x; \varepsilon_0) \subset A,$$

すなわち

$$B(x; \varepsilon_0) \cap A^c = \emptyset.$$

これは

$$\forall y \in A^c \implies d(x, y) \geq \varepsilon_0$$

を示す．ゆえに

$$d(x, A^c) \geq \varepsilon_0 > 0.$$

逆についてはこの議論の逆をたどればよい．

■

$A, B \subset X$ に対して

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

を A, B の距離という．一般に

$$A \cap B \neq \emptyset \implies d(A, B) = 0$$

であるが，逆は成り立たない．

例 2.6 \mathbb{R} において， $A = (0, 1)$, $B = [1, 2)$ ならば $d(A, B) = 0$ かつ $A \cap B = \emptyset$.

定理 2.2 距離空間 X の閉集合 A, B が $A \cap B = \emptyset$ とする．このとき，次の条件をみたす実数値連続関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する．

$$0 \leq f(x) \leq 1,$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in B. \end{cases}$$

証明

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \tag{2.1}$$

に取ればよい．well-defined ? $d(x, A) + d(x, B) = 0$?

問題 2.10 閉集合の仮定が壊れるとどうなるか．

$A \subset X$ について

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \tag{2.2}$$

を A の直径という . 特に

$$A = \{x\} \text{ (一点集合)} \implies \delta(A) = 0. \quad (2.3)$$

また

$$0 \leq \delta(A) \leq +\infty \quad (2.4)$$

である . もし

$$\exists x_j, y_j \in A \text{ s.t. } d(x_j, y_j) \rightarrow \infty$$

ならば $\delta(A) = +\infty$ である . $\delta(A) < \infty$ のとき , A は有界であるという .

例 2.7 開球体 $B(a; \varepsilon)$ について $\delta(B(a; \varepsilon)) \leq 2\varepsilon$ である . $B(a; \varepsilon)$ は有界である .

問題 2.11 一般に $\delta(B(a; \varepsilon)) = 2\varepsilon$ ではない . 反例を挙げてこれを示せ . ユークリッド空間では正しい .

2.5 近傍

定義 2.2 距離空間 (X, d) において , $U \subset X$, $a \in X$, a が U の近傍であるとは次の条件をみたすときをいう .

$$a \text{ が } U \text{ の内点である (} a \in U^i \text{)}$$

a の近傍の全体を近傍系といい , $V(a)$ で表す .

開球体 $B(a; \varepsilon)$ について

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(a; \varepsilon) \in V(a).$$

例 2.8 $(\mathbb{R}, d^{(1)})$ において $[0, 1] \notin V(0)$.

近傍系について次の結果が成り立つ .

命題 2.2 (1) a を含む開集合はすべて a の近傍である .

$$(2) \forall a \in X, X \in V(a).$$

$$(3) \forall V \in V(a), a \in V.$$

$$(4) V \subset V' \text{ かつ } V \in V(a) \text{ ならば } V' \in V(a).$$

$$(5) V_1, V_2 \in V(a) \implies V_1 \cap V_2 \in V(a)$$

$$(6) \forall V \in V(a), \exists W \in V(a) \text{ s.t.}$$

$$\forall b \in W, V \in V(b).$$

証明 (1), (2), (3) 自明

$$(4) a \in V^i \subset (V^i)^i.$$

$$(5) (V_1 \cap V_2)^i = V_1^i \cap V_2^i.$$

(6) $W = V^i$ とおく. $a \in V^i$ で $W \in \mathcal{O}$ だから $W \in V(a)$. さらに, $b \in W$ ならば $b \in V^i$. よって $V \in V(b)$. ■

$V(x)$ を x の近傍系とする. $V^*(x) (\subset V(x))$ が x の基本近傍系とは,

$$\forall V \in V(x), \exists U \in V^*(x) \text{ s.t. } U \subset V$$

をみたすときをいう. 次の意味で基本近傍系は”基本的”である.

命題 2.3 基本近傍系 $V^*(x)$ があれば近傍系 $V(x)$ を構成できる.

証明

$$V(x) = \{V : \exists U \in V^*(x) \text{ s.t. } U \subset V\}$$

が成り立つ. 実際,

$$M := \{V : \exists U \in V^*(x) \text{ s.t. } U \subset V\}$$

とおくと, $V \in M$ ならば $U \subset V$ をみたす $U \in V^*(x)$ がある. $x \in U^i$ なので $x \in V^i$. これは $V \in V(x)$. $M \subset V(x)$. 逆は明らか.

例 2.9 基本近傍系の例を挙げる.

$$(1) V^*(x) = \{O \in \mathcal{O} : x \in O\}, \quad x \text{ を含む開集合全体.}$$

$$(2) V^*(x) = \{B(x; \varepsilon) : \varepsilon > 0\}, \quad x \text{ の開球体全体.}$$

以下, $V^*(x)$ は一つの基本近傍系とする.

問題 2.12

$$x \in M^i \iff \exists U \in V^*(x) \text{ s.t. } U \subset M.$$

同様に外点, 触点, 境界点, 集積点も, $B(x; \varepsilon)$ の代わりに基本近傍系を用いて定義を与えることができることを示せ.

問題 2.13

$$\{B(x; \varepsilon) : \varepsilon > 0, \varepsilon \text{ は有理数}\}$$

は基本近傍系となることを示せ .

問題 2.14 基本近傍系は次の性質をみたすことを示せ .

(1) $U \in V^*(x)$ ならば $x \in U$.

(2) $U_1, U_2 \in V^*(x)$ ならば $\exists U_3 \in V^*(x)$ s.t.

$$U_3 \subset U_1 \cap U_2.$$

(3) $U \in V^*(x)$ ならば $\exists W \in V^*(x)$ s.t.

$$\forall y \in W, \exists U_y \in V^*(y) \text{ s.t. } U_y \subset U.$$

2.6 連続写像

定義 2.3 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ を距離空間として , $f : X_1 \rightarrow X_2$ を写像とする . $x \in X_1$ で f が連続

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t.}$$

$$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

例 2.10 $(\mathbb{R}^1, d^{(1)})$ のときは

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

開球体 $B_2(f(x); \varepsilon)$ について

$$f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon)) : \text{ 逆像}$$

は

$$y \in f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon)) \iff d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

であるから , f が x で連続であるとは , $f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon))$ が x の近傍であることと同値である . すなわち

$$B_1(x; \delta) \subset f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon)). \tag{2.5}$$

これは次のように一般化できる :

命題 2.4 f が x で連続 \iff

$$\forall U \in V(f(x)) \implies f^{-1}(U) \in V(x).$$

証明

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}(U) \\ \therefore f(x) &\in U. \end{aligned}$$

U は $f(x)$ の近傍だから

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B_2(f(x); \varepsilon) &\subset U \\ \therefore f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon)) &\subset f^{-1}(U). \end{aligned}$$

仮定より

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \text{ s.t. } B_1(x; \delta) &\subset f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon)) \\ \therefore B_1(x; \delta) &\subset f^{-1}(U). \end{aligned}$$

これは $f^{-1}(U) \in V(x)$ を表す . ■

問題 2.15 (2.5) に従って $f(x) = x^2; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であることを示せ .

定理 2.3 $f : X_1 \rightarrow X_2$ について次の命題は同値¹¹ :

- (1) f は X_1 の各点 x で連続 .
- (2) (X_2, d_2) の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ は (X_1, d_1) の開集合 .
- (3) (X_2, d_2) の閉集合 F に対して $f^{-1}(F)$ は (X_1, d_1) の閉集合 .
- (4) $\forall A \subset X$,

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

問題 2.16 (4) の概念図を書け . 直感的な意味を考えよ¹² .

証明 (1) \implies (4):

背理する . $f(x) \in f(\overline{A})$ かつ $f(x) \notin \overline{f(A)}$ とせよ¹³ .

¹¹(1) が (2) が同値であることが重要

¹²証明の (1) \implies (4) を参照 .

¹³ $f(A)$ は閉集合であるから x との距離は positive である . これが連続性に反する . 定理 2.1(2) を見よ .

$f(x) \notin \overline{f(A)}$ より $\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$\begin{aligned} B_2(f(x); \varepsilon) \cap \overline{f(A)} &= \emptyset \\ \therefore f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon)) \cap f^{-1}(\overline{f(A)}) &= \emptyset \end{aligned}$$

ここで, 一般に $A \cap B = \emptyset \implies f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ を用いた¹⁴. (1) より $\exists \delta > 0$ s.t.

$$\begin{aligned} B_1(x; \delta) &\subset f^{-1}(B_2(f(x); \varepsilon)) \\ \therefore B_1(x; \delta) \cap f^{-1}(\overline{f(A)}) &= \emptyset. \end{aligned} \tag{2.6}$$

一方, $x \in \overline{A}$ より

$$\begin{aligned} \exists x_1 \in B_1(x; \delta) \cap A &\neq \emptyset \\ \therefore f(x_1) \in f(A) \subset \overline{f(A)}. \end{aligned}$$

ところが, (2.6) から $x_1 \notin f^{-1}(\overline{f(A)})$ であるので

$$f(x_1) \notin \overline{f(A)}.$$

矛盾である.

(4) \implies (3) を示す.

(X_2, d_2) の閉集合 F に対して $f^{-1}(F) =: A$ とおく. (4) から

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F.$$

ここで, 一般に $f(f^{-1}(A)) = A$ を用いた¹⁵. よって

$$\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F). \tag{2.7}$$

逆は常に正しいので,

$$\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F).$$

これは $f^{-1}(F)$ が閉集合であることを示す. ■

問題 2.17 (3) \implies (2), (2) \implies (1) を導け (容易).

定義 2.4 定理 2.3 の (1)-(4) のいずれかが成立するとき, したがってすべてが成立するとき f は X_1 上の連続関数という.

例 2.11 $f(x) = d(x, A)$ は X から \mathbb{R} への連続関数である.

¹⁴これを導け

¹⁵これを導け

3 完備距離空間

3.1 完備距離空間の具体例

定義 3.1 (コーシー列) 距離空間 (X, d) において, 点列 $\{x_n\} \subset X$ が次の条件をみたすときコーシー列という. $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $n, m \geq N$ ならば $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

命題 3.1 $\{x_n\}$ がコーシー列であることと次の条件は同値である. $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ s.t. $n \geq N$ ならば $d(x_n, x_N) < \varepsilon$.

問題 3.1 これを示せ.

命題 3.2 収束列はコーシー列である.

問題 3.2 これを示せ.

逆に

定義 3.2 (完備距離空間) コーシー列が常に収束列であるとき (X, d) は完備であるという.

完備距離空間の例を挙げよう.

例 3.1 $(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ は完備である.

$$|x_k - y_k| \leq d^{(n)}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \quad \forall k$$

なので, $\{x^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ はコーシー列であるとする. 任意の $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して $\{x_k^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ は \mathbb{R} のコーシー列であるから \mathbb{R} の完備性から $\exists x_k^* \in \mathbb{R}$ s.t. $|x_k^{(j)} - x_k^*| \rightarrow 0, j \rightarrow \infty$. $x^* = (x_k^*)_{k=1}^n$ とおくと, $d^{(n)}(x^{(j)}, x^*) \rightarrow 0$ である. ■

例 3.2 ヒルベルト空間 (ℓ^2, d_{∞}) は完備である.

$x, y \in \ell^2$ に対して

$$d_{\infty}(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$$

で距離を入れる (既出).

▽

Claim 3.1 (ℓ^2, d_∞) は完備である .

$x^{(n)} = (x_j^{(n)})_{j=1}^\infty$ を ℓ^2 のコーシー列とする . すなわち $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ s.t.

$$n \geq N \implies d_\infty(x^{(n)}, x^{(N)}) < \varepsilon.$$

まず ,

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(N)}| \leq d_\infty(x^{(n)}, x^{(N)}), \quad \forall j$$

であるから , 各 $j \geq 1$ 毎に $\{x_j^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ は \mathbb{R} のコーシー列である . 実数の完備性から $\exists x_j^* \in \mathbb{R}$ s.t.

$$x_j^{(n)} \rightarrow x_j^*, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

ここで $x^* = \{x_j^*\}_{j=1}^\infty \in \ell^2$ であることを示そう . 三角不等式から

$$d_\infty(x^{(n)}, 0) \leq d_\infty(x^{(n)}, x^{(N)}) + d_\infty(x^{(N)}, 0).$$

$n \geq N$ ならば

$$d_\infty(x^{(n)}, 0) \leq \varepsilon + d_\infty(x^{(N)}, 0).$$

$\forall k$ について

$$\sum_{j=1}^k (x_j^{(n)})^2 \leq (\varepsilon + d_\infty(x^{(N)}, 0))^2.$$

$n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{j=1}^k (x_j^*)^2 \leq (\varepsilon + d_\infty(x^{(N)}, 0))^2.$$

右辺は k について上界だから

$$\sum_{j=1}^\infty (x_j^*)^2 \leq (\varepsilon + d_\infty(x^{(N)}, 0))^2 < \infty.$$

よって

$$x^* = (x_j^*) \in \ell^2.$$

最後に $x^{(n)} \rightarrow x^*$ であることをいう .

$$d_\infty(x^{(n)}, x^{(m)}) < \varepsilon \quad (n, m \geq N)$$

であることから , $\forall k$ 毎に

$$\sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j^{(n)} - x_j^{(m)})^2} < \varepsilon.$$

k と N は独立であることに注意 . $n \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^k (x_j^* - x_j^{(m)})^2} \leq \varepsilon.$$

さらに , $k \rightarrow \infty$,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} (x_j^* - x_j^{(m)})^2} \leq \varepsilon.$$

ゆえに

$$d_{\infty}(x^*, x^{(m)}) \leq \varepsilon.$$

これは $x^{(m)} \rightarrow x^*$ を示す . よって完備性が示せた . ■

例 3.3 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数の全体を $C[0, 1]$ で表す . $C[0, 1]$ の関数は最大値 , 最小値をもつ . 特に $f, g \in C[0, 1]$ について , $|f - g|$ は最大値をもつ . そこで , $C[0, 1]$ において

$$d_s(f, g) := \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

を導入すると

Claim 3.2 d_s は $C[0, 1]$ 上の距離関数である .

問題 3.3 これを導け .

▽

Claim 3.3 $(C[0, 1], d_s)$ は完備距離空間である .

示そう . $\{f_n\}$ を $C[0, 1]$ のコーシー列とする . $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ s.t.

$$\max_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

すると各 x 毎に

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N \tag{3.2}$$

であるので¹⁶ $\{f_n(x)\}$ は \mathbb{R} におけるコーシー列である . \mathbb{R} の完備性から

$$f_n(x) \rightarrow f^*(x), \quad n \rightarrow \infty$$

¹⁶番号 N は $x \in I$ に無関係に取れることに注意 .

なる $f^*(x) \in \mathbb{R}$ が存在する . (3.2) から $n \rightarrow \infty$ とすると f^* は

$$|f^*(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall m \geq N \quad (3.3)$$

をみたく . N は $x \in I$ によらない . ここでチェックすべきは次の 2 点 :

(i) $f^* \in C[0, 1]$.

(ii) $d_s(f_n, f^*) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$.

(i) を満たせば , (3.3) の左辺で $\max_{x \in [0, 1]}$ をとると , (ii) を得る .

(i) を検証する . $|x - y| \rightarrow 0$ のとき $|f^*(x) - f^*(y)| \rightarrow 0$ であるかを見る . (3.3) から

$$\begin{aligned} |f^*(x) - f^*(y)| &\leq |f^*(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f^*(y)| \\ &\leq 2\varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)|. \end{aligned}$$

$f_N \in C[0, 1]$ であるので , $\exists \delta_1 > 0$ s.t.

$$|x - y| < \delta_1 \implies |f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon.$$

以上から

$$|x - y| < \delta_1 \implies |f^*(x) - f^*(y)| < 3\varepsilon$$

が得られた . これは f^* が連続であることを示す . ゆえに $f^* \in C[0, 1]$. ■

完備距離空間とならない例を挙げよう .

例 3.4 $C[0, 1]$ において

$$d_i(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

を導入するとき

Claim 3.4 d_i は距離関数である .

問題 3.4 これを示せ .

▽

Claim 3.5 $(C[0, 1], d_i)$ は完備ではない .

反例を挙げよう .

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq 1/2), \\ (1/2, 1) \text{ と } (a_n, 0) \text{ を結ぶ線分} & (1/2 < x < a_n), \\ 0 & (a_n \leq x \leq 1). \end{cases}$$

ただし , $1/2 < a_n < 1, a_n \downarrow 1/2 (n \rightarrow \infty)$ に取る . このとき ,

問題 3.5 f_n はコーシー列であることを示せ .

問題 3.6 $d_i(f_n, f^*) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ となる関数 f^* はどのようなものであるか .

注意 3.1 距離関数 d_i について完備性を得るには $C[0, 1]$ はある意味狭い¹⁷

3.2 完備距離空間における縮小写像

定義 3.3 (X, d) を距離空間とする . 写像 $f : X \rightarrow X$ が次の条件をみたすとき縮小写像であるという . $0 < \exists c < 1$ s.t.

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

問題 3.7 縮小写像は連続であることを示せ .

次の結果は応用上重要である .

定理 3.1 (X, d) を完備距離空間とする . f を X における縮小写像とする . このとき , $\exists x \in X$ s.t. $x = f(x)$ がただ一つ存在する (不動点の存在) .

証明 ただ一つであること . x, y を f の不動点とする . f は縮小写像だから

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y) \quad \wedge \quad 0 < c < 1.$$

不動点であることを用いると $d(x, y) \leq c d(x, y)$. ゆえに $(1 - c)d(x, y) \leq 0, d(x, y) \leq 0, d(x, y) = 0$. よって $x = y$.

存在について . $x_1 \in X$ をひとつ取る . 以下 , 次のように点列 $\{x_n\}$ を構成する .

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_2) \\ &\dots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\dots \end{aligned}$$

このとき x_n はコーシー列である . 実際 ,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq c d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq c^{n-1} d(x_2, x_1).$$

¹⁷ $L^1[0, 1]$ を考える必要がある . ルベーグ積分へ .

よって $n > m$ に対して, 三角不等式を用いると

$$\begin{aligned}d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (c^{n-2} + c^{n-3} + \cdots + c^{m-1})d(x_2, x_1) \\ &\leq \frac{c^{m-1}}{1-c} d(x_2, x_1) \longrightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

したがって $\{x_n\}$ はコーシー列である. 完備性と f の連続性から不動点の存在を得る. ■

4 全有界距離空間

よく知られた実数におけるボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理：

”実数の有界無限集合は集積点をもつ”

に同等の結果を距離空間において考える．

定義 4.1 $\forall \varepsilon > 0, \exists U_j, j = 1, 2, \dots, k$ (有限個) s.t. $\delta(U_j) < \varepsilon, \{U_j\}$ は X を被覆する：

$$X = \bigcup_{j=1}^k U_j$$

このとき， (X, d) は全有界距離空間という¹⁸．

基本的な事実から

命題 4.1 全有界な距離空間は有界である．すなわち， $\delta(X) < \infty$.

証明 特に $\varepsilon = 1$ として， X が全有界であるから

$$X = \bigcup_{j=1}^k U_j \quad \wedge \quad \delta(U_j) < 1.$$

次の補題を用いる．

補題 4.1 $A, B \subset X$ のとき¹⁹，

$$\delta(A \cup B) \leq d(A, B) + \delta(A) + \delta(B).$$

問題 4.1 補題を導け．

▽

補題より直ちに

$$\begin{aligned} \delta(X) &= \delta(\cup_j U_j) \\ &\leq d(U_1, U_2 \cup \dots \cup U_k) + \delta(U_1) + \delta(\cup_{j=2}^k U_j) \\ &\leq \dots \\ &\leq d(U_1, U_2 \cup \dots \cup U_k) + d(U_2, U_3 \cup \dots \cup U_k) + d(U_{k-1}, U_k) \\ &\quad + \delta(U_1) + \delta(U_2) + \dots + \delta(U_k) \end{aligned}$$

これより導けた．

■

¹⁸ $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$, A の直径

¹⁹ $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$, A, B の距離

注意 4.1 この主張の逆は一般に成立しない．反例を挙げると， (X, d) は X が無限集合で，距離 d を次で与える．

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y). \end{cases}$$

問題 4.2 この (X, d) は有界であるが全有界でないことを示せ．

注意 4.2 $(\mathbb{R}^n, d^{(n)})$ については逆が成立．すなわち，ユークリッド空間においては”有界”と”全有界”は同じ概念である．

問題 4.3 これを導け．

ボルツァノ・ワイエルシュトラスの距離空間版を述べる．

定理 4.1 (X, d) が全有界距離空間であるための必要十分条件は， X の任意の点列がコーシー列を部分列として常に含むことである．

注意 4.3 (1) (X, d) に完備性が備わると「 X の任意の点列は集積点をもつ」が従う．よって，定理はボルツァノ・ワイエルシュトラスの一般化．実は有界性ではなく全有界性が本質的．

(2) 一般に有界な距離空間では上の定理の主張は成立しない．反例として， $X = \mathbb{Z}$ ， $d(x, y) = 1 (x \neq y), = 0 (x = y)$ ．このとき，相異なる点から成る点列 $\{a_n\}$ はどれもコーシー列を含まない．

問題 4.4 上の (\mathbb{Z}, d) は有界であるが全有界でないこと示せ (問題 4.2 に同じ)．

定理 4.1 を証明する．

証明 必要であること． $\{x_n\}$ を任意の点列としてまず次を示す．すなわち，いくらでも近い部分列を取れる：

補題 4.2 $\forall \varepsilon > 0, \{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$; 部分列 s.t. $d(x_{n_j}, x_{n_k}) < \varepsilon (\forall j, k)$ ．

証明 全有界であることから $\varepsilon > 0$ に対して $\exists U_j, j = 1, \dots, k$ s.t.

$$X = U_1 \cup \dots \cup U_k \quad \wedge \quad \delta(U_j) < \varepsilon.$$

$\{x_n\} \subset X$ であるので無限個の番号がある U_j に属する．すなわち $\exists U_j$ s.t.

$$\{n : x_n \in U_j\} = \{n_1, n_2, \dots\}.$$

この部分列で $\{x_{n_i}\}$ を作ると $\delta(U_j) < \varepsilon$ であるので $d(x_{n_i}, x_{n_k}) < \varepsilon, \forall i, k$. ▽

さて, $\varepsilon = 1/n, n \geq 1$ とおき, 次のように順に部分列をとり続ける.

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \\
 & x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots \quad 1\text{-列 } (\varepsilon = 1) \\
 & x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}, \dots \quad 1/2\text{-列} \\
 & \dots \\
 & x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots \quad 1/n\text{-列} \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

ここで $\{x_k^{(k)}\}$ は $\{x_n\}$ の部分列であってコーシー列である²⁰. 実際, $x_k^{(k)}$ は k を大きくすると, いくらでも近くできる.

十分であること. 対偶が正しいことをいう. つまり

Claim 4.1 全有界でないならばある点列についてコーシー列を含まない.

全有界でないので, $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\delta(U_j) < \varepsilon$ をみたすいかなる有限個の部分集合 U_j を持ってきても

$$X \setminus \bigcup_{j=1}^k U_j \neq \emptyset$$

である. そこで特別な U_j を取って矛盾を引き出す.

任意の有限集合 M の点 $y \in M$ について $B(y; \varepsilon_0)$ を考える. ただし, $2\varepsilon_0 < \varepsilon$ に取る.

$$\delta(B(y; \varepsilon_0)) \leq 2\varepsilon_0 < \varepsilon$$

であるので

$$\exists x \in X \setminus \bigcup_{y \in M} B(y; \varepsilon_0).$$

各 M に対して x の対応がつく; $\varphi(M) = x$. そこで具体的に M を次のように構成する.

$M_1 = \{a_1\} \subset X$ について

$$\varphi(\{a_1\}) = a_2$$

²⁰このような論法を対角線論法という.

とする．順に $M_2 = \{a_1, a_2\}$ として

$$\varphi(\{a_1, a_2\}) = a_3$$

$$\varphi(\{a_1, a_2, a_3\}) = a_4$$

...

$$\varphi(\{a_1, \dots, a_{n-1}\}) = a_n$$

...

で点列 $\{a_n\}$ を構成する．すると, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} の半径 ε_0 の ball の外側に a_n があるので,

$$d(a_n, a_m) \geq \varepsilon_0, \quad n \neq m$$

である．よってコーシー列を含まない． ■

(X, d) が第2可算公理をみたすとは, 高々可算な基底をもつ, すなわち, X の可算な部分集合の族 \mathcal{B} があって任意の $O \in \mathcal{O}$ が $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$, $B_j \in \mathcal{B}$ であるときをいう²¹ .

定理 4.2 全有界距離空間は第2可算公理をみたす .

証明 まず次の補題を示す . (X, d) が可分であるとは, 高々可算な部分集合 $M \subset X$ があって $X = \overline{M}$ をみたすときをいう .

補題 4.3 (X, d) が距離空間で, 可分ならば第2可算公理をみたす .

証明 $X = \overline{M}$ かつ M は高々可算である . この M で

$$\mathcal{B} := \{B(a; r) : a \in M, r > 0, r \in \mathbf{Q}\}$$

を考える . \mathcal{B} は可算集合である . さらに, $O \in \mathcal{O}$ に対して, $\forall x \in O$ について $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x; \varepsilon) \subset O$. 可分であるから

$$\exists a' \in B(x; \varepsilon/2) \cap M.$$

ここで $x \in B(a'; r)$ かつ $B(a'; r) \subset B(x, \varepsilon)$ をみたす $r \in \mathbf{Q}$ が取れる . 実際, $d(a', x) < r < \varepsilon/2$ とすればよい . ゆえに

$$x \in B(a'; r) \subset O,$$

$$\bigcup_{x \in O} B(a'(x); r(x)) = O.$$

これは \mathcal{B} が基底であることを示す . $a' \in M, r \in \mathbf{Q}$ から主張を得る . ▽

²¹第1可算公理について調べよ .

注意 4.4 逆は一般の位相空間で成り立つことが知られている .

補題により X が可分であることを示せば十分である . まず , $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon$; 有限集合 s.t.

$$d(x, M_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

を示す . X が全有界であるから $\varepsilon > 0$ に対して $\exists U_j \subset X, j = 1, 2, \dots, k$ s.t. $X = U_1 \cup \dots \cup U_k$ かつ $\delta(U_j) < \varepsilon$. 各 U_j から元を取る , $a_j \in U_j$. ここで

$$M_\varepsilon := \{a_1, \dots, a_k\}$$

とおくと , この M_ε が求めるものである . 実際 , $x \in X$ ならば $x \in \exists U_j$. ゆえに $a_j, x \in U_j$. $\delta(U_j) < \varepsilon$ だから

$$(d(x, M_\varepsilon) \leq) d(x, a_j) < \varepsilon.$$

▽

さて , $\varepsilon = 1/n, n \geq 1$ に取る . このとき $\exists M_n$; 有限集合 s.t. $d(x, M_n) < 1/n$ ($x \in X$).
ここで

$$M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

とおく . M_n は有限だから M は可算 . そして $M_n \subset M$ だから

$$d(x, M) \leq d(x, M_n) < 1/n.$$

$n \rightarrow \infty$ とすると $d(x, M) = 0$. これは $x \in \overline{M}$ と同値である . 以上から $X \subset \overline{M}$. $X = \overline{M}$ が示せた . ■

5 コンパクト距離空間

\mathbb{R} における有界閉区間 $[a, b]$ の特徴付けである,

”任意の点列は収束する部分列を含む”

を距離空間において考える. この性質をフレッシュェの意味のコンパクト性または点列コンパクトという:

定義 5.1 ((FC)) 任意の点列は収束する部分列を含む.

(FC) は次の定理で特徴づけられる.

定理 5.1 距離空間 (X, d) において,

$$(FC) \iff \text{全有界かつ完備}$$

注意 5.1 全有界かつ完備は \mathbb{R}^n においては有界閉集合となる. 特に $[0, 1]$ は有界かつ完備であるが, $(0, 1]$ は有界であるが完備ではない. したがって, $(0, 1]$ は点列コンパクトではない.

証明 \Leftarrow は定理 4.1 から直ちに従う.

\Rightarrow を示す. 任意の点列 $\{x_n\}$ に対して, (FC) より収束する部分列をもつ. 収束列は明らかにコーシー列であるので Thm 4.1 から全有界が従う. さらに完備性を示すと, 任意のコーシー列 $\{x_n\}$ に対して, (FC) から収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ をもつ: $x_{n_j} \rightarrow \exists x^*$. よって $x_n \rightarrow x^*$ である. ■

問題 5.1 $\{x_n\} \subset X$ はコーシー列で, 収束する部分列 $x_{n_j} \rightarrow x^*$ を含む. このとき $x_n \rightarrow x^*$ を示せ.

続いて通常の意味のコンパクト性を考える.

定義 5.2 (コンパクト距離空間) 距離空間 (X, d) が次の性質をもつときコンパクトという. X の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ について, 常に有限個の \mathcal{U} の元で X を被覆できる (有限被覆性).

まず可算被覆の存在を保証するリンデレーフの性質について述べる.

定義 5.3 (リンデレーフの性質) X の開被覆 $\mathcal{U} = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対して, 常に高々可算個の \mathcal{U} の元で X を被覆できる, とき (X, d) はリンデレーフの性質をみたすという.

定理 5.2 距離空間 (X, d) が第 2 可算公理をみたすならばリンデレーフの性質をもつ. 特に全有界距離空間はリンデレーフの性質をもつ.

注意 5.2 この結果は一般の位相空間において成り立つ.

証明 証明のポイントは第 2 可算公理で主張されている可算の基底の存在を被覆の可算性に置き換えることである.

$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆とする. 一方, $\mathcal{B} = \{O_j\}$ を可算基底とする. つまり $U_\lambda = \cup_{i=1}^{\infty} O_{j_i}$. 各 O_j について

$$O_j \subset U_\lambda$$

なる λ を一つ取り λ_j とする: $O_j \subset U_{\lambda_j}$. これが可能なすべての j について $\{U_{\lambda_j}\}$ は X の開被覆である. 実際, $\forall x \in X$ に対して $x \in \exists U_\lambda$. ゆえに $x \in \exists O_{j_i} \subset U_{\lambda_j}$. よって示せた. ■

コンパクト距離空間は次のように特徴付けられる.

定理 5.3 (X, d) を距離空間とする. 次の 3 つの主張は同値である.

- (i) X はコンパクト.
- (ii) X は点列コンパクト.
- (iii) X は全有界かつ完備.

証明 (ii) と (iii) が同値であることは Thm 4.1 において示した.

(i) \implies (ii) を示す. $\{a_n\} \subset X$ を任意の点列とする. 矛盾を導くことにより示す. 収束する部分列を持たない, すなわち任意の $x \in X$ に対してある $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ があって,

$$\#\{n : a_n \in B(x; \varepsilon(x))\} < \infty$$

とする. すると $\{B(x; \varepsilon(x))\}$ は X の開被覆である:

$$X = \bigcup_{x \in X} B(x; \varepsilon(x)).$$

X のコンパクト性から $\exists x_1, \dots, x_k \in X$ s.t.

$$X = \bigcup_{j=1}^k B(x_j; \varepsilon(x_j)).$$

これより $\#\{n : a_n\} < \infty$ となり矛盾である．点列コンパクトであることが示せた²²．

逆に (ii) \implies (i) を示そう． $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆とする．(ii), (iii) が同値であることから (iii) の条件を用いる．全有界であるから Thm 4.2 から第 2 可算公理をみたす．Thm 5.2 からリンデレーフの性質をみたす．よって \mathcal{U} から可算開被覆の存在がいえる．つまり

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j, \quad U_j \in \mathcal{U}.$$

ここで有限開被覆が成り立たないとしよう． $\forall n,$

$$\exists a_n \in A_n := X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$$

点列コンパクト性から $\exists a_{n_k}$; 部分列 s.t. $a_{n_k} \rightarrow \exists a \in X$. $A_n \supset A_{n+1}$ だから $\forall j \geq 1$ を固定するとき, $n_k \geq j$ なるすべての k について

$$a_{n_k} \in A_j.$$

A_j は閉集合だから $a \in A_j$. j は任意だから

$$a \in \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

一方で,

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = X \setminus \bigcup_{n \geq 1} U_n$$

であるから²³,

$$a \in X \setminus \bigcup_{n \geq 1} U_n.$$

これは $\{U_j\}$ が X を被覆していることに反する． ■

²²実際, ある点 x の任意の ε -近傍に無限個の番号が存在するので, ε を限りなく小さく取ることにより x に収束する部分列を取ることができる．

²³包含関係を調べて導け．

5.1 コンパクト距離空間の同値条件

定理 5.4 (X, d) を距離空間とする．次の3つの主張は同値である．

- (i) X はコンパクト．
- (ii) X は点列コンパクト．
- (iii) X は全有界かつ完備．

証明 (ii) と (iii) が同値であることは既に示した．(i) \implies (ii) を示す．

$\{a_n\} \subset X$ を任意の点列とする．まず次の補題を示す²⁴．

補題 5.1 $\exists x \in X$ s.t. $\forall \varepsilon > 0$,

$$\{n : a_n \in B(x; \varepsilon)\} \text{ は無限集合.}$$

証明 背理法による． $\forall x \in X, \exists \varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ s.t. $\{n : a_n \in B(x; \varepsilon(x))\}$ は有限とする．すると

$$\{B(x; \varepsilon(x))\}_{x \in X}$$

は X の開被覆であるから， X のコンパクト性により $\exists x_1, \dots, x_k \in X$ s.t.

$$X = \bigcup_{j=1}^k B(x_j; \varepsilon_j), \quad \varepsilon_j = \varepsilon(x_j).$$

ところが，各 $B(x_j; \varepsilon_j)$ に含まれる a_n の番号 n は高々有限個であるので X に含まれる a_n の番号 n は有限個ということになって矛盾である． ∇

Lemma より， $\varepsilon = 1$ として

$$\exists n_1 \in \{n : n \geq 1, a_n \in B(x; 1)\} \neq \emptyset.$$

無限集合であることから，順に

$$\exists n_2 \in \{n : n > n_1, a_n \in B(x; 1/2)\} \neq \emptyset$$

$$\exists n_3 \in \{n : n > n_2, a_n \in B(x; 1/3)\} \neq \emptyset$$

...

$$\exists n_k \in \{n : n > n_{k-1}, a_n \in B(x; 1/k)\} \neq \emptyset$$

...

により $\{a_{n_k}\}$ を作る．明らかに

$$a_{n_k} \rightarrow x \quad (k \rightarrow \infty)$$

である．点列コンパクトであることが示せた．

²⁴点列はある点の近くに集まっている

逆に (ii) \implies (i) を示す. $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の開被覆とする. (ii), (iii) が同値であることから (iii) の条件を用いることができる. 全有界であるから第 2 可算公理をみたく (後述). さらに, リンデレーフの性質をみたく²⁵ (後述). よって \mathcal{U} から可算開被覆の存在がいえる:

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j, \quad U_j \in \mathcal{U}.$$

ここで仮に有限開被覆が成り立たないとしよう. $\forall n,$

$$\exists a_n \in A_n := X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$$

点列コンパクト性から $\exists a_{n_k};$ 部分列 s.t. $a_{n_k} \rightarrow \exists a \in X.$

ここで A_n は $A_n \supset A_{n+1}$ だから $\forall j \geq 1$ を固定するとき, $n_k \geq j$ なるすべての k について

$$a_{n_k} \in A_j.$$

A_j は閉集合, $a_{n_k} \rightarrow a$ から $a \in A_j$ が従う. j は任意なので

$$a \in \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

一方で集合の演算から

$$\bigcap_{n \geq 1} A_n = X \setminus \bigcup_{n \geq 1} U_n$$

であるから,

$$a \in X \setminus \bigcup_{n \geq 1} U_n.$$

これは $\{U_j\}$ が X を被覆していることに反する.

以上から (i) \iff (ii) が得られた. ■

最後に上の証明で用いた結果を示す. まず, 全有界に関する一結果を示す.

命題 5.1 全有界距離空間は第 2 可算公理²⁶をみたく.

証明 まず次の補題を示す.

補題 5.2 (X, d) が距離空間ならば, X が可分²⁷ のとき第 2 可算公理をみたく.

²⁵ X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, 常に, 高々可算個の \mathcal{U} の元で X を被覆できるとき (X, d) はリンデレーフの性質をみたくという.

²⁶ 可算基底 B をもつことということ. つまり, X の (高々) 可算個の部分集合から成る族 B が存在して, $O \in \mathcal{O}$ (開集合) ならば $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, B_j \in B$ とできること.

²⁷ $\exists M \subset X,$ 高々可算集合, s.t. $X = \overline{M}.$

証明 $X = \overline{M}$ かつ M は高々可算である . この M で

$$\mathcal{B} := \{B(a; r) : a \in M, r > 0, r \in \mathbf{Q}\}$$

を考える . \mathcal{B} は可算集合である .

$O \in \mathcal{O}$ を一つ取る . O は開集合だから , $\forall x \in O$ について $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(x; \varepsilon) \subset O$. 特に $x \in X, X = \overline{M}$ より ,

$$\exists a' \in B(x; \varepsilon/2) \cap M \neq \emptyset.$$

つまり , $x \mapsto a' = a'(x) \in M$ の対応ができる .

r として , $d(a', x) < r < \varepsilon/2, r \in \mathbf{Q}$ なるものを取る . すると $x \in B(a'; r)$. さらに三角不等式から

$$B(a'; r) \subset B(x, \varepsilon).$$

ゆえに

$$x \in B(a'; r) \subset O,$$

$$\therefore \bigcup_{x \in O} B(a'(x); r(x)) = O.$$

これは O が \mathcal{B} の元の和集合で表せることを示す . よって \mathcal{B} は可算基底である . ▽

注意 5.3 この Lemma の逆は一般の位相空間で成り立つことが知られている .

Lemma により 全有界距離空間が可分であることを示せば良い .

まず , $\forall \varepsilon > 0, \exists M_\varepsilon$; 有限集合 s.t.

$$\forall x \in X \implies d(x, M_\varepsilon) < \varepsilon$$

を示す .

X が全有界であるから $\varepsilon > 0$ に対して $\exists U_j \subset X, j = 1, 2, \dots, k$ s.t. $X = U_1 \cup \dots \cup U_k$ かつ $\delta(U_j) < \varepsilon$. 各 U_j から元を取る : $a_j \in U_j$. ここで

$$M_\varepsilon := \{a_1, \dots, a_k\}$$

とおくと , この M_ε が求めるものである . 実際 , $x \in X$ ならば $x \in \exists U_j$. ゆえに $a_j, x \in U_j$. $\delta(U_j) < \varepsilon$ だから

$$d(x, a_j) < \varepsilon.$$

$$\therefore d(x, M_\varepsilon) \leq d(x, a_j) < \varepsilon.$$

▽

さて , $\varepsilon = 1/n, n \geq 1$ に取る . 上の結果に代入すると , $\exists M_{1/n}$; 有限集合 s.t. $d(x, M_{1/n}) < 1/n$ ($x \in X$). ここで $M_{1/n}$ に対して

$$M := \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{1/n}$$

とおく . $M_{1/n}$ は有限だから M は可算 . そして $M_{1/n} \subset M$ だから

$$d(x, M) \leq d(x, M_{1/n}) < 1/n.$$

$d(x, M)$ は n に無関係だから , $n \rightarrow \infty$ とすると $d(x, M) = 0$. これは $x \in \overline{M}$ と同値である . 以上から $X \subset \overline{M}$. 逆の包含関係は自明だから , $X = \overline{M}$ を得る . ■

もう一つ , 第 2 可算公理に関する一結果を示す .

定義 5.4 (リンデレーフの性質) X の開被覆 $\mathcal{U} = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ に対して , 常に高々可算個の \mathcal{U} の元で X を被覆できるとき (X, d) はリンデレーフの性質²⁸をみたすという .

命題 5.2 第 2 可算公理をみたすならばリンデレーフの性質をもつ .

証明 証明のポイントは第 2 可算公理で主張されている可算の基底の存在を , 被覆の可算性に置き換えることである .

$\mathcal{U} = \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を X の開被覆とする . また , (第 2 可算公理で保証される) 可算基底を \mathcal{B} とする . 各 $O \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mathcal{U}_O = \{U : U \in \mathcal{U}, O \subset U\} \quad (O \text{ を含む } \mathcal{U} \text{ の元全体})$$

とおく . \mathcal{B} の部分集合として

$$\mathcal{B}' = \{O \in \mathcal{B} : \mathcal{U}_O \neq \emptyset\}$$

は可算である . ここで \mathcal{B}' の元 O から \mathcal{U}_O の元 U_O をただ一つ対応させる : $O \mapsto U_O$. そして

$$\mathcal{U}' := \{U_O : O \in \mathcal{B}'\} \quad (\text{考えている対応の像})$$

とおく . \mathcal{B}' が可算なので \mathcal{U}' も可算である . そして \mathcal{U}' は X を被覆する .

実際 , $\forall x \in X, x \in \exists U_\lambda$. \mathcal{B} は基底なので , U_λ は \mathcal{B} の元の和集合として書ける . よって $\exists O \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in O \subset U_\lambda$. $O \in \mathcal{B}'$ が従う . \mathcal{U}' の定義から , O に対して $U_O \in \mathcal{U}'$ が定まり

$$x \in O \subset U_O.$$

これは

$$X \subset \bigcup_{O \in \mathcal{B}'} U_O$$

を与える . 逆の包含関係は自明だから , $X = \cup_{O \in \mathcal{B}'} U_O$ を得る . ■

²⁸可算被覆の存在を保証する性質である .