問：積を計算せよ.

4/15

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

解説

4/15 '05

(1), (2), (3), (5), (6), (8) は 定義可能

(4), (7) は 定義不能

線形 I

4/22 '05

1. $D=(d_{ij})_{\substack{i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n}}$ $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\cdots,n \\ j=1,2,\cdots,l}}$

$B=(b_{ij})_{\substack{i=1,2,\cdots,n \\ j=1,2,\cdots,l}}$

のとき $D(A+B)=DA+DB$

を積の厳密な定義から導け.

2. X, Y, A, B は2次正方行列で

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, 次の X, Y についての連立方程式を解け.

$$\begin{cases} 2X+3Y=A \\ -X+5Y=B \end{cases}$$

3. n次正方行列 $A_1, \cdots, A_k$ は正則であるとき,

$$A=A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_k \quad (\text{積})$$

は正則であって

$$A^{-1}=A_k^{-1}\cdot A_{k-1}^{-1}\cdot\cdots\cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$$

を導け.

解読.　　　　　　　　　　　　　　4/22'05

1.　$A+B = (a_{ij}+b_{ij})$

$$\therefore (D(A+B))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}(A+B)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_{ik}(a_{kj}+b_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj} + \sum_{k=1}^{n} d_{ik}b_{kj}$$

$$= (DA)_{ij} + (DB)_{ij} \quad //$$

2.　正方行列の全体は和、スカラー倍について閉じているから
通常の連立方程式の解き方をすればよい.

$$X = \frac{1}{13}(5A-3B) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 23 & -6 \\ -4 & 22 \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{13}(A+2B) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}. \quad //$$

3.　$k=2$のときは既に示した.　一般のkで成立すると仮定.

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1}\cdots\cdots A_1^{-1}$$

$k+1$のときは,

$$(\underbrace{A_1 \cdot A_2 \cdots A_k}\cdot\underbrace{A_{k+1}})^{-1} = A_{k+1}^{-1}(A_1\cdots\cdots A_k)^{-1} \quad \left(\begin{matrix}k=2の\\結果から\end{matrix}\right)$$

$$= A_{k+1}^{-1}A_k^{-1}\cdots A_1^{-1} \quad (仮定より)$$

数学的帰納法により すべての$k\geq 2$について 正しい.　//

5/6 '05　　　線形 I

1. 次の行列をはき出し法により単位行列に変形せよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ に対して，次の行基本変形に対応する基本行列を作り，実際に左からかけることで変形を行え

(1) ② × (−3)

(2) ③ + ① × 4

(3) ② ↔ ③.

3. i行とj行を交換する基本行列 $P(i,j)$ の逆行列をもとめよ．

4. 問1の行列の逆行列をもとめよ．

5/6 解答.

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{1}\leftrightarrow\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3}+\textcircled{1}\times(-2)]{\textcircled{2}+\textcircled{1}\times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\textcircled{2}\leftrightarrow\textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{3}+\textcircled{2}\times 2]{\textcircled{1}+\textcircled{2}\times(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{3}\times\frac{1}{11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\textcircled{2}+\textcircled{3}\times(-3)]{\textcircled{1}+\textcircled{3}\times 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ //$$

2. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.
$$P(i,j)^{-1} = P(i,j)$$

4. 1.の行列 A に対して

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$