5/13 '05　　線形 I

1. 次の行列について，正則ならば逆行列を求めよ．もし正則でないならば"正則でない"と答えよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -10 \\ 6 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5/13 解答

1. (1) 正則 $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -7 & 8 & 3 \\ -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 正則でない. rank A = 2 の標準形をもつ.

(3) $$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow④} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad //$$

$$\therefore\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (= A)$$

1. 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が積について可換であるとき a, b, c, d のみたすべき条件を求めよ.

3. 正方行列 A, X, Y について，$AX = E_n, YA = E_n$ ならば $X = Y$ であることを示せ．ただし，A は正則とは限らない.

4. 正方行列 A が $A^4 + A^3 + A^2 + A + E_n = O$ をみたすとき A は正則であることを示し，その逆行列を A を用いて与えよ．ただし，$A^k, k = 2, 3, \cdots$, は A の k 個の積を表す.

5. 次の行列は逆行列をもつことを確認し，逆行列を基本行列の積で表せ．積を計算する必要はない.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. 次の行列の rank を求めよ．また逆行列があれば求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (5) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$

K.U.

5/20 演習問題 解答

1. (1) $\begin{pmatrix} 17 & 1 & 18 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -4 & 8 & -36 \\ 3 & -6 & 27 \\ 6 & 12 & -54 \end{pmatrix}$

(3) 113

2. $AX = XA$ より $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$ $\therefore a = d,\ b = c$

$\therefore X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

3. $Y = YE_n = Y(AX) = (YA)X = E_nX = X$.

4. 条件より $E_n = (-A^3 - A^2 - A - E_n)A$

$= A(-A^3 - A^2 - A - E_n)$

よって A は正則で, $A^{-1} = -A^3 - A^2 - A - E_n$

5. 確認は行基本変形のみで単位行列になることをチェックする.

(2) について,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②+①\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+①\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{②\times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+②\times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③+②\times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{③\times\frac{1}{7}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{①+③\times 3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{②+①\times(-2)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ //$$

それぞれの変形に対応する基本変形を考えると，

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=A^{-1}.}$$

$$\times\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(1)，(3) も同じように考える．

6. (1) $\mathrm{rank}A=2$ (2) $\mathrm{rank}A=3$ (3) $\mathrm{rank}A=2$

(4) $\mathrm{rank}A=5$ (5) $a\neq 1, -\frac{1}{2}$ のとき $\mathrm{rank}A=3$，

$a=-1/2$ のとき $\mathrm{rank}A=2$， $a=1$ のとき $\mathrm{rank}A=1$.

以上から

(2)，(4)，(5) の $a\neq 1, -1/2$，のとき は 正則

であり，逆行列が存在する．

検算をすることによって求めた逆行列が正しいことを確かめる．

5/27.　線形 I

1.　次の行列の標準形を求め，rank を決定せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

2.　次の連立方程式を解け．

(1) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x - 5y = 1 \\ -3x + y = 0 \\ -5x - 3y = 2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ y - z + w = 0 \\ x + z + 2w = 2 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 6 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \end{cases}$

5/27 解説.

1. (1)〜(3) すべてランクは2.

2. (1) 解はただ1つ

(2) (パラメータ1つを含む)解は無数

(3) 解はもたない

(4) (パラメータ1つを含む)解は無数

(5) (パラメータ1つを含む)解は無数.

(注): (i) 得られた解が正しいか否かは方程式に代入することによってチェックする.

(ii) (4), (5)の係数行列の標準形を求めるためには列交換が必要であろう.