6/3 '05　　　線形 I

1.　a を定数，

$$\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

が解を無数にもつように a を定めよ．

2.　a, b を定数とする．

$$\begin{cases} x + y + 2z = b \\ -x + ay + z = 2 \\ 2x + y - z = 3. \end{cases}$$

について (a, b) 平面に次の条件をみたす範囲を図示せよ．

(i) 解をただ1つもつ

(ii) 解を無数にもつ

(iii) 解をもたない．

6/3 解答.

1. 拡大 $\left(\begin{array}{ccc:c} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{②+①\times(-a)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \cancel{\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \end{array}\right)}$

$\cancel{\xrightarrow{①+②\times(-a)}}$

$\downarrow ③+①\times(-1)$

$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \end{array}\right)$

ここで $a \neq 1$ ならば $1-a \neq 0$ より

$\xrightarrow{②\times\frac{1}{1-a}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{①+②\times(-a)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{③+②\times(-(1-a^2))} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a+1-a^2 & 0 \end{array}\right)$

$= 2-a-a^2$

よって

$2-a-a^2=0 \Rightarrow$ 解無数, $2-a-a^2 \neq 0 \Rightarrow$ 解ただ1つ

$2-a-a^2=0 \Rightarrow a=-2$. 最後に $a=1$ のときは

$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|cc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$: 解無数

以上から $a=1$, $a=-2$ のとき 解は無数.

2.

拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & b \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

は基本変形により

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3-b \\ 0 & 1 & 5 & 2b-3 \\ 0 & 0 & 3-5(a+1) & b+2-(2b-3)(a+1) \end{pmatrix}$$

になる．したがって

(i) $3-5(a+1) \neq 0$ ならば解はただひとつ．すなわち，$a \neq -2/5$.

(ii) $3-5(a+1) = 0$ かつ $b+2-(2b-3)(a+1) = 0$ ならば解は無数．すなわち，$a = -2/5$, $b = 19$.

(iii) $3-5(a+1) = 0$ かつ $b+2-(2b-3)(a+1) \neq 0$ ならば解を持たない．すなわち，$a = -2/5$ かつ $b \neq 19$.

6/10 '05　　線形Ⅰ

1. 2次正方行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の逆行列が、$ad-bc \neq 0$ のとき $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ で与えられることをはき出し法により導け.

2. 順列 $\sigma = (n, n-1, n-2, \cdots, 2, 1)$ について、符号 $\mathrm{sign}\,\sigma$ をもとめよ.

3. $a_{ij} = 0$ $(i < j)$ をみたす行列を下三角行列という：$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots\cdots a_{nn}$$

を示せ.

6/10 解答

1. $a=0$ かつ $c=0 \Rightarrow ad-bc=0$ だから $a\neq 0$ か $c\neq 0$

の一方は成立. $a\neq 0$ とする.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①\times\frac{1}{a}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②+①\times(-c)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & \boxed{d-\frac{bc}{a}} & -c/a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times\frac{a}{|A|}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & \underbrace{-\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{|A|}}_{=-c/|A|} & \frac{a}{|A|} \end{array}\right)$$

$$d-\frac{bc}{a} = \frac{ad-bc}{a} = \frac{|A|}{a}$$

$$\xrightarrow{①+②\times(-\frac{b}{a})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d/|A| & -b/|A| \\ 0 & 1 & -c/|A| & a/|A| \end{array}\right) \quad //$$

$c\neq 0$ のときは ①$\leftrightarrow$② として同じようにできる.

2. $$\operatorname{sign}\sigma = \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n: \text{偶数} \\ (-1)^{(n-1)/2}, & n: \text{奇数} \end{cases}$$

3. $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & & O \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ とおくと $|A_n| = a_{nn}|A_{n-1}|$

したがって,

$$|A_n| = a_{nn}\cdot a_{n-1\,n-1}|A_{n-2}| = \cdots = a_{nn}\cdot a_{n-1\,n-1}\cdot\cdots a_2\cdot a_1$$

//

6/17　線形 I

1. 正方行列 A について A が正則ならば

$$({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$$

を示せ。（ヒント：$X = {}^{t}(A^{-1})$ とおいて正則の条件をみたすことを示せ）

2. 行列式を計算せよ。

(1)
$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \\ 7 & 10 & -2 \end{vmatrix}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 \\ 7 & -3 & -7 & 2 \\ 9 & -4 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

3. $|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3| = 4$ のとき，次の値をもとめよ。

$$|-\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3,\ 4\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3,\ 6\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3|$$

6/17 解答

1. A が正則だから ${}^t(A^{-1})$ は意味がある

$X = {}^t(A^{-1})$ とおくと

$${}^tAX = {}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}\cdot A) = {}^t(E_n) = E_n$$

同様にして $X\,{}^tA = E_n$ も示せる. $\therefore\ ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

2. (1) -25 (2) -598

3. $|-\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_3,\ 4\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3,\ 6\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_3|$

$= |-\boldsymbol{a}_1, -\boldsymbol{a}_2, -3\boldsymbol{a}_3| + |-\boldsymbol{a}_1, -\boldsymbol{a}_3, 5\boldsymbol{a}_2|$

$+ |2\boldsymbol{a}_2, 4\boldsymbol{a}_1, -3\boldsymbol{a}_3| + |2\boldsymbol{a}_2, -\boldsymbol{a}_3, 6\boldsymbol{a}_1|$

$+ |3\boldsymbol{a}_3, 4\boldsymbol{a}_1, 5\boldsymbol{a}_2| + |3\boldsymbol{a}_3, -\boldsymbol{a}_2, 6\boldsymbol{a}_1|$

$= 328$