行列の基本変形と行列式

梅津健一郎

平成 19 年 4 月 30 日

序文

　このノートは前橋工科大学の開講授業科目「線形代数 I」，及びそれに相当する科目の講義に準じた内容を含む．ただし，その講義は梅津健一郎が担当するものに限ることに注意されたい．

目 次

1　行列の基礎

1.1　行列の定義

まず，行列の定義を与えよう．扱う数は実数の範囲内とする．自然数 m, n に対して，a_{ij} $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$ を実数とするとき，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を m **行** n **列行列**という．単に (m, n) 行列という．横の並びを**行**といい，縦の並びを**列**という：

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13}, \ldots, a_{1n} \quad \text{第 1 行}$$

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix} \quad \text{第 1 列}$$

a_{ij} を行列の**成分**という：

$$a_{11} \quad (1, 1) \text{ 成分}$$

$$a_{12} \quad (1, 2) \text{ 成分}$$

$$a_{ij} \quad (i, j) \text{ 成分}$$

行列 A を単に

$$A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$$

またはより簡単に $A = (a_{ij})$ と書くことがある．

問題 1.1 (1)　$(4, 2)$ 行列をひとつ作れ．

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

の $(2,3)$ 成分を求めよ．

(3)

$$a_{ij} = \frac{2j}{i+j}$$

のとき，

$$A = (a_{ij})_{i=1,2,3;\ j=1,2}$$

を作れ．

1.2 行列の和とスカラー倍

ここでは行列同士の和とスカラー倍を定義する．同じ**大きさ**[1]の 2 つの行列 A, B に対して：

$$A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}, \quad B = (b_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$$

和 $A+B$ を次で定義する．

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n}$$

違う大きさの行列の間には和は定義されない．

例 1.1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

行列に実数をかけ算することを行列を**スカラー倍**するという．実数 c を用いて

$$cA := (ca_{ij})$$

で定義される．

問題 1.2

$$-2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

を計算せよ．

注意 1.1 行列の引き算 $A - B$ (**差**) は $A - B = A + (-B)$ で定義される．

[1] m, n が等しい 2 つの行列

このように定義された和とスカラー倍はどのような基本的性質を持つかを見よう．

定理 1.1 (和とスカラー倍に関する法則) A, B, C は (m, n) 行列である．c, d は実数である．このとき

(1) $$A + B = B + A \quad \text{交換則}$$

(2) $$(A + B) + C = A + (B + C), \quad c(dA) = (cd)A \qquad \text{結合則}$$

(3) $$c(A + B) = cA + cB, \quad (c + d)A = cA + dA \qquad \text{分配則}$$

注意 1.2 この定理が述べていることは実数の世界における演算から導かれる法則が行列の演算においても同様に成立するということである．

定義 1.1 (零行列) すべての成分が 0 の行列を零行列といい，O で記す.

零行列は上記の演算の枠組みで実数の 0 (零元) の役割を持つ.

1.3 行列の積

1.3.1 導入

ここでは行列同士のかけ算を定義する．まずは $(2, 2)$ 行列同士のかけ算を定義する．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

この定義は前の行列の**列の数**と後ろの行列の**行の数**が**等しい**ことを用いてなされている．一般の場合はこの考え方を拡張する．すなわち，(m, n) 行列 A と (n, ℓ) 行列 B に対して積 AB は定義される（A の列数と B の行数が一致）．

問題 1.3

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

を計算せよ.

注意 1.3 (1) 一般に (m,n) 行列 A と (n,ℓ) 行列 B の積 AB は (m,ℓ) 行列である．

(2) AB が定義可能であっても BA が定義可能であるとは限らない．

問題 1.4 AB が定義可能であって，BA が定義可能でない例を作れ．AB, BA が共に定義可能な例を作れ．

問題 1.5 行列の積が定義可能な実例を挙げて実際に計算をせよ．

1.3.2 総和記号（準備）

総和記号について復習する．

$$1+2+\cdots+99+100=\sum_{n=1}^{100} n=\sum_{j=1}^{100} j.$$

$$1+3+5+\cdots+11=\sum_{m=1}^{6}(2m-1)=\sum_{\ell=0}^{5}(2\ell+1).$$

問題 1.6

$$2+6+10+14+\cdots+38=\sum_{n=0}^{9}(4n+2).$$

一般に

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{j=1}^{n} a_j.$$

分配則：

$$c(\sum_{k=1}^{n} a_k)=\sum_{k=1}^{n} ca_k.$$

結合則：

$$\sum_{k=1}^{m} a_k+\sum_{j=1}^{m} b_j=\sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k).$$

ダブルインデックス：

$$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m}=\sum_{j=1}^{m} a_{1j}.$$

和の順序交換：

$$\begin{aligned}
& a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\
& \quad + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\
& \qquad + \cdots \\
& \qquad\quad + a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} \\
= \ & \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) \quad (i \text{ を固定して } j \text{ で先に和を取る}) \\
= \ & \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}) \quad (j \text{ を固定して } i \text{ で先に和を取る})
\end{aligned}$$

1.3.3 積の厳密な定義

$A = (a_{ij})$ は (m, n) 行列，$B = (b_{ij})$ は (n, ℓ) 行列とせよ．

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

を次で定義する．AB の $(1,1)$ 成分 c_{11} は

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}.$$

AB の $(2,1)$ 成分 c_{21} は

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1}.$$

AB の $(1,2)$ 成分 c_{12} は

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2}.$$

以下同様にして，AB の (i,j) 成分 c_{ij} は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

で定義される.

上の定義により

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,\ell}$$

と表記される[2].

1.3.4 積の性質

行列の積が持つ性質について確認しておこう.

定理 1.2 A, B は (m,n) 行列, C は (n,ℓ) 行列, D は (r,m) 行列として, $c \in \mathbb{R}$ とする. つぎが成立する.

(1) $(A+B)C = AC + BC$ (分配則)

(2) $D(A+B) = DA + DB$ (分配則)

(3) c (AB) = (cA)B = A (cB) (結合則)

(4) (AB)C = A(BC) (結合則)

(5) 一般に非可換である, $AB \neq BA$.

証明 (1) を示す. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ とせよ. $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. よって

$$\begin{aligned}(A+B)C &= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}\right)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj})\right)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}\right) \quad \text{(結合則)}\\ &= AC+BC.\end{aligned}$$

(2) は (1) に同じ. (3) については $c \in \mathbb{R}$ について

$$c\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(ca_{ik})b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(cb_{kj})$$

により従う.

[2] AB が (m,ℓ) 行列であることは直ちにわかる.

(4) を示す．$A=(a_{ij})$ は (m,n) 行列，$B=(b_{ij})$ は (n,ℓ) 行列，$C=(c_{ij})$ は (ℓ,p) 行列 とせよ．AB の (i,j) 成分を $(AB)_{ij}$ と記す．すなわち

$$(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

$(AB)C$ の (i,j) 成分は

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{r=1}^{\ell}(AB)_{ir}c_{rj} \\ &= \sum_{r=1}^{\ell}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kr})c_{rj} \\ &= \sum_{r=1}^{\ell}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kr}c_{rj} \quad (\text{分配則}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{\ell}a_{ik}b_{kr}c_{rj} \quad (\text{順序交換}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}a_{ik}\ (\sum_{r=1}^{\ell}b_{kr}c_{rj}) \quad (\text{分配則})\end{aligned}$$

ここで $\sum_{r=1}^{\ell}b_{kr}c_{rj}$ は BC の (k,j) 成分であるから右辺は $A(BC)$ に等しい． ■

1.4 正方行列の正則性

(n,n) 行列を n 次正方行列と呼ぶ．単に正方行列と呼ぶこともある．正方行列は**対角成分**を持つ．正方行列の世界が持つ固有の特徴として，上で定義した**演算（和，スカラー倍，積）について閉じている**ことがある．特に，A,B が n 次正方行列ならば 積 AB, BA は定義可能でやはり n 次正方行列になる．しかし非可換性により，一般に $AB\neq BA$ である．

問題 1.7 2 次正方行列で $AB=BA$ をみたすもの，$AB\neq BA$ をみたすものをそれぞれ挙げよ．

n 次正方行列で対角成分がすべて 1 で，その他の成分が 0 の行列を**単位行列**といい，E_n で表す．E_n は実数の中の 1 (単位元) と同じ役割を持つ，すなわち

命題 1.1 n 次正方行列 B に対して $E_nB=BE_n=B$.

証明 $\because$ $E = (e_{ij})$ とすると $e_{ij} = \delta_{ij}$.

$$(E_n B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} b_{kj} = e_{ii} b_{ij} = b_{ij}.$$

BE_n についても同様. ■

単位行列は実数の単位元 1 に相当する．1 を用いて実数の逆数が定義されるように単位行列を用いて逆行列を定義する．A を n 次正方行列とせよ.

$$AX = XA = E_n$$

を満たす n 次正方行列 X が存在するとき，A を**正則**であるといい，X を A の**逆行列**といい，A^{-1} で記す.

問題 1.8 条件をみたす X はただひとつに定まることを示せ.

問題 1.9 $(A^{-1})^{-1} = A$ を示せ.

逆行列の性質をまとめておく.

定理 1.3 A, B は n 次正方行列で正則である．このとき AB はやはり正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

証明 $X = B^{-1}A^{-1}$ とおく．結合則から

$$(AB)X = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = E_n.$$

同様にして $X(AB) = E_n$ を得る. ■

系 1.1 一般に A_j がすべて正則のとき，

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

問題 1.10 系を示せ.

2　行列の基本変形

2.1　逆行列

2.1.1　行基本変形の定義

行列に対して次の 3 つの操作を**行基本変形**という.

(1)　ある行の各成分に 0 でない実数 c を掛ける. e.g.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{② \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

(2)　ある行の各成分に別の行の各成分の c 倍を加える. e.g.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{① + ② \times (-2)} \begin{pmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

(3)　２つの行を入れ替える. e.g.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{① \leftrightarrow ②} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

同様に列に関しての (1)-(3) の操作を列基本変形という. ここで次の問題を考える.

問題 2.1 n 次正方行列を有限回の行基本変形（どの種類を何度用いても良い）で単位行列に E_n に変形できるか？

その先の帰着として,

定理 2.1 そのように E_n に変形できるならば A は正則である.

E_n に変形できる正方行列の例を見よう. 次は一般に**掃き出し法**といわれる.

例 2.1

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{② + ① \times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{③ + ① \times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}
$$

$(1,1)$ 成分を軸とした第一列の**掃き出し**

$$
\xrightarrow{② \times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{① + ② \times 2 \ \text{ and } \ ③ + ② \times(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{③ \times(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{① + ③ \times(-2) \ \text{ and } \ ② + ③ \times(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

E_3 に変形できた．

問題 2.2 次の行列を上の要領で E_3 に変形せよ．

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

2.1.2　基本行列

行基本変形は行列の積を通して表現される．まず例を見よう．

例 2.2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow ① \leftrightarrow ②$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow ① \times 3$$

ここで

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を**基本行列**といい，行基本変形は基本行列を**左から**掛けることで表現される．

基本行列の作り方を見よう．基本行列は E_n をそれぞれ行基本変形することで得られる．簡単のため，E_3 で行う．

(1) ① $\times c$ $(c \neq 0)$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: M(1;c)$$

問題 2.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \ldots$$

(2) ② + ① $\times c$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A(2,1;c)$$

問題 2.4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \ldots$$

(3) ① $\leftrightarrow$ ②：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: P(1,2)$$

問題 2.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \ldots$$

次に基本行列の性質を見よう．

定理 2.2 基本行列はすべて正則である．

証明　最初に $M(i;c)$ について見よう．例えば E_n について

$$M(1;1/c)M(1;c)E_n = M(1;c)M(1;1/c)E_n = E_n$$

であるからである．ここで $c \neq 0$ が本質的に重要である．

次に $A(i,j;c)$ について見よう．

$$A(2,1;c)\,A(2,1;-c)E_n = A(2,1;-c)\,A(2,1;c)E_n = E_n$$

であるからである．

最後に $P(i,j)$ については

$$P(2,1)P(1,2)E_n = E_n$$

であるからである． ■

以上のことから正方行列 A が行基本変形で E_n になることを数学的に確立しておく．

定理 2.3 n 次正方行列 A が行基本変形により $A \to\to\to \cdots \to E_n$ であるとは，それぞれ対応する基本行列 B_k $(k = 1, 2, \ldots m)$ が存在して

$$B_m B_{m-1} \cdots B_2 B_1 A = E_n$$

となることである．

さて，B_k はすべて正則である．したがって

$$P := B_m \cdots B_1$$

も正則であり，$PA = E_n$ を満たす．さらに

$$AP = P^{-1}P(AP) = P^{-1}(PA)P = E_n.$$

よって A の逆行列を求めることができた．

問題 2.6 実際に例 2.1 の行列に対して逆行列を基本行列の積で表せ．

2.1.3 逆行列の存在のため条件

定理 2.4 (標準形) n 次正方行列 A は「行基本変形」と「列交換」により，つぎの 2 つのいずれかに変形できる．これらを**標準形**と呼ぶ．

(1)
$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{単位行列}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}, \quad E_r \text{ は } r \text{ 次の小単位行列}$$

注意 2.1 (1) 小単位行列 E_r に次数 r を A の rank (ランク) という．$r = \mathrm{rank}\ A$ と書く．

(2) 標準形が E_n の場合には $\mathrm{rank}\ A = n$ と理解する．

(3) rank は変形の仕方に依らず一通りに決まる（**一意性**）．

(4) 標準形が E_n の場合には，A は行基本変形のみで E_n に変形可能である．

問題 2.7 注意 2.1 (4) について，なぜそうなのかを考えよ[3]．

例 2.3 列交換が必要な場合を挙げる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 2.8 標準形を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

さて，定理 2.3 により，標準形が E_n の場合には A は正則である（A^{-1} が存在する）．一方，E_n ではない場合には次の結果が成立する．

定理 2.5 定理 2.4 において，タイプ (2) の標準形の場合，A は正則ではない．

[3]列交換が必要なのは，ある列において，ある行番号以下のすべての成分が零になるときである．これら零成分は以後の行変形において不変であるので，決して単位行列になることはない．

証明　まず，タイプ (2) の標準形自身，正則ではない．実際，

$$A = \begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$$

とおいて，$AX = E_n$ が成立すると仮定すれば第 n 行において矛盾が生じる．

さて，定理は背理法により示される．仮に A は正則であるとして，しかし行変形と列交換により

$$A \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$$

であるとする．これは，定理 2.4 により，ある n 次正則行列 P_j, Q_j が存在して

$$P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_\ell = \begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$$

であることを意味する．ただし，次のことに注意．例として，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

にあるように「列交換」とは「基本行列を右から掛けること」を意味する．積の正則性の保存から

$$B := P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_\ell$$

は正則であるが，先に示したように，右辺は正則ではない．以上で矛盾が導けた．　■

2.1.4　逆行列の計算方法

実際，逆行列は定理 2.4 により，基本行列の積を求めることによって得られる．が，一般にそれを実行することは計算上多大な苦痛を伴う．そこで次のような発想でより容易に逆行列を求めることを考える．定理 2.5 により A が正則であることは

$$A \to\to \cdots \to E_n \text{ (行変形)} \iff PA = E_n \text{ (P は対応する基本行列の積)}$$

目的は P を求めることである．そこで同じ変形を E_n に対して行うと

$$E_n \to\to \cdots \to X \iff PE_n = P$$

となって $X = P$ であることがわかる．以上から次を得た．

定理 2.6 n 次正方行列 A に対して，$(n, 2n)$ 行列 $(A\ E_n)$ を作り，これを A が 標準形 E_n になるように変形していく：

$$(A\ E_n) \to\to \cdots \to (E_n\ P)$$

このようにして得られた P が A^{-1} である．このとき，もし途中で列交換が必要になったり，$A \to\to \cdots \to E_n$ に**ならない**場合は A は正則ではない．

問題 2.9 つぎの行列の逆行列を求めよ．

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -5 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2.2 連立方程式

2.2.1 係数行列

ここでは行列の基本変形の応用として，連立方程式の解法を学ぶ．まず次の結果は定理 2.4 の一般の行列への拡張である．

定理 2.7 (標準形２) (m, n) 行列 A は行基本変形と列交換により，次の４つの行列（**標準形**）に帰着される．

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{正方行列の場合}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} E_m & * \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$$

さて，１次連立方程式を考える．

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ 4x+5y+6z &= -1 \\ 7x+8y+9z &= -3 \end{cases} \quad 3\text{元}1\text{次連立方程式} \tag{2.1}$$

のタイプ，一般には

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \quad n\ \text{元}1\text{次連立方程式} \tag{2.2}$$

方程式 (2.1) に対して

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \textbf{係数行列}$$

$$A' = (A\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -3 \end{pmatrix} \quad \textbf{拡大係数行列}$$

と呼ぶ．一般の方程式 (2.2) に対しても同様に定義される．

問題 2.10 次の拡大係数行列から決まる連立方程式を作れ．

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2.2.2 基本変形と解集合の関係

１次連立方程式を解くことは行列の行基本変形と密接な関係がある．まずは簡単な例でこのことを説明する．

例 2.4 次の連立一次方程式を考える．

$$x + y = 1$$
$$2x - 3y = 1$$

通常，この方程式を解くにはある未知数を消去することにより行う．つまり，第一式を 2 倍：$2x + 2y = 2$. 第 2 式を片々引くと，$5y = 1$. ゆえに $y = 1/5$. これを第一式に代入して $x = 4/5$. この解法において,「第一式を 2 倍」,「片々引く」という操作がそれぞれ，**第一行を 2 倍**，**はきだし**という行列の基本変形に対応する．

次のことが成立する．

定理 2.8 (解集合不変) 拡大係数行列 A' にある行基本変形を行って B' とするとき，B' で定まる連立方程式 と A' で定まる連立方程式の解集合は不変である．

問題 2.11 実際に (2.1) においてこの定理を検証せよ．

注意 2.2 さらに，係数行列の**列を交換する**場合には，交換に対応する未知数を交換して拡大係数行列を方程式に読み替えれば**解集合はやはり不変**である．

$$(A\ \boldsymbol{b}) \overset{\text{行変形, } A \text{ の列交換}}{\longrightarrow} (A'\ \boldsymbol{b}') \overset{\text{行変形, } A' \text{ の列交換}}{\longrightarrow} (A''\ \boldsymbol{b}'') \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\text{標準形}\ \tilde{\boldsymbol{b}})$$
$$\Longrightarrow \text{解集合不変}$$

2.2.3 標準形に対する解の表示

したがって，次の方針で方程式の解法を考える：

”拡大係数行列の**係数行列のパート を標準形にせよ** ”

問題 2.12 次の連立方程式の係数行列を標準形にすることにより解を求めよ．

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ 4x - y + 5z = 1 \\ -2x + y + 3z = 4 \end{cases}$$

定理 2.7 から 4 つのタイプの解表示が得られればすべての連立方程式を解くことができる．

解の存在と非存在について考える．係数行列を標準形にしたとき，次の形になった．

$$(A\ \boldsymbol{b}) \to \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

方程式に直すと

$$\begin{cases} x + 3z = 1 \\ y + z = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

矛盾である．これより

定理 2.9 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b})$ ならば，またそのときに限り解は存在する．

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のとき，**同次方程式**という．同次方程式は常に解をもつ．実際，未知数がすべて 0 は一つの解である．

続いて，解の表示について考える．４つの標準形に対する解表示を行う．列交換は行われないと仮定する．

(i) タイプ (1) の場合．

$$(A\ \boldsymbol{b}) \to \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

方程式に直すと

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

(ii) タイプ (2) の場合．

$$(A\ \boldsymbol{b}) \to \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$z = t$ とおくと

$$\begin{cases} x = t + 4 \\ y = -2t + 1 \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+4 \\ -2t+1 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ は実数})$$

(iii) タイプ (2) の場合，その 2 .

$$(A\ \boldsymbol{b}) \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$z = t, w = s$ とおくと

$$\begin{cases} x = -t + 3s + 1 \\ y = 4t + s - 1 \end{cases}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t+3s+1 \\ 4t+s-1 \\ t \\ s \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問題 2.13 次の拡大係数行列を解表示せよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 2.14 次の連立方程式を解け．

(1)
$$\begin{cases} x+y-z &= -2 \\ 2x+3y-4z &= -9 \\ x+2y-3z &= -7 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x+2y+3z &= 1 \\ 2x-2y+3z &= -1 \\ x-2y+5z &= 2 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} 3x-3y-z &= 1 \\ -2x+y+bz &= -1 \\ 2x+5y-3z &= a \end{cases}$$

解が存在するための (a,b) の条件を求めよ．そのときの解を表示せよ．

2.2.4 連立方程式の解集合の構造

連立方程式 $(A\ \boldsymbol{b})$ は行列の積を用いて $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$ と表すことができる．$\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ のとき**同次方程式**という．$\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ のとき**非同次方程式**という．

同次方程式の場合，$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}(A\ \mathbf{0})$ であるから常に解をもつ．実際 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ は解である．同次方程式の場合には $\mathbf{0}$ 以外にどれだけ解をもつかを知ることが重要である．

では，非同次方程式の場合はどうか？非同次方程式のある解を $\mathbf{x}_1$ としたとき次の結果が成り立つ．

定理 2.10 $(A\ \boldsymbol{b})$ のすべての解 $\mathbf{x}$ は

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_0\ \text{は同次方程式の解}$$

と表現できる．

つまり，非同次方程式の解全体の広がりは同次方程式の解全体の広がりと同じである．

問題 2.15 連立方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

について定理の結果を確かめよ．

3　行列式

3.1　はじめに

ここでは行列の行列式について学ぶ．以下，n 次正方行列のみを扱う．$n=2$ の場合：

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

行列式は

$$|A| = ad - bc$$

で定義される．$|A| \neq 0$ のとき，かつそのときに限り A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられる．さて，それでは

”$n \geq 3$ についてはどうだろうか？”

ここでの目的は次の 2 点である．

- 一般の n 次正方行列の行列式の定義を与え，その計算を行う．
- 行列の正則性と行列式に関係について調べる．

言い換えると $n=2$ の上記の結果を ”$n \geq 3$ に拡張 ”することを目的とする．

3.2　順列（行列式の定義の準備として）

1 から n までの自然数の組 $(1, 2, \ldots, n)$ を長さ n の**順列**という．同じ長さの順列の中で，数の並ぶ順番が違えば異なる順列と認識される，例えば $(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$ である．今，順列 $(2, 3, 1)$ を 2 つの数の入れ替え（**置換**）の繰り返しにより $(1, 2, 3)$ にすることを試みる．$(1, 2, 3)$ を**基本順列**と呼ぶ．例えば，

$$(2, 3, 1) \to (1, 3, 2) \to (1, 2, 3).$$

このとき順列の**符号**という概念を入れる．長さ n の順列 σ が偶数回の置換により $(1, 2, \ldots, n)$ なるとき

$$\mathrm{sign}\,\sigma = 1$$

と定義し，奇数回の置換による場合，

$$\operatorname{sign}\sigma = -1$$

と定義する．厳密には，k 回の置換により $(1, 2, \dots, n)$ になる場合に

$$\operatorname{sign}\sigma = (-1)^k$$

と定義する．

例 3.1 $\operatorname{sign}(2, 3, 1) = 1$.

注意 3.1 置換の仕方に依らず**順列の符号は一意的**に定まる．

問題 3.1 次の順列の符号を決定せよ．

(1) $(2, 1)$

(2) $(3, 2, 1)$

(3) $(2, 4, 1, 3)$

(4) $(5, 1, 2, 3, 4)$

長さ n の**順列の全体**を S_n で表す．

例 3.2

$$S_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$$

問題 3.2 S_2, S_4 を実際に書き下せ．

一般に S_n は $n!$ (n の階乗) 個の元から成る．

3.3 行列式の定義

ここでは行列式の定義を行う．n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ に対して**行列式** $|A|$ (または $\det A$) は次で与えられる．

$$|A| = \sum_{(p_1,\dots,p_n)\in S_n} \operatorname{sign}(p_1, \dots, p_n) a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}.$$

例 3.3 $n = 2$ の場合は

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{(p_1,p_2)\in S_2} \mathrm{sign}\,(p_1, p_2) a_{p_1 1} a_{p_2 2} \\ &= \mathrm{sign}\,(1,2) a_{11} a_{22} + \mathrm{sign}\,(2,1) a_{21} a_{12} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

問題 3.3 $n = 3$ の場合を実際に書き下せ[4].

一般に行列式 $|A|$ は $n!$ 個の和で与えられる．しかしながら実際にこの定義に従って計算を行うことは多大な労苦を伴う．なぜなら，$n!$ 個の和を計算することは n が大きくなれば非常に大変なことであるからだ．そこで，以下，行列式が満たすべき性質を導き出し，それらを上手く援用することで計算を容易に行えるようにしよう．

3.4 行列式の性質

3.4.1 行列式の次数を下げる

次の定理が出発点となる．

定理 3.1

$$\begin{vmatrix} B & O \\ * & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}|B|.$$

証明 $n = 3$ で証明を行う．示すべきは

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

である．行列式の定義 $(n = 3)$ において：

$$|A| = \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3} \mathrm{sign}\,(p_1, p_2, p_3) a_{p_1 1} a_{p_2 2} a_{p_3 3}$$

今，$a_{13} = a_{23} = 0$ であることから，p_3 について $p_3 = 3$ のみが生きる．よって a_{33} は和

[4] これを**サラスの方法**という

について無関係であるから

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \sum_{(p_1,p_2,3)\in S_3} \mathrm{sign}\,(p_1,p_2,3) a_{p_1 1} a_{p_2 2} a_{33} \\ &= a_{33} \sum_{(p_1,p_2,3)\in S_3} \mathrm{sign}\,(p_1,p_2,3) a_{p_1 1} a_{p_2 2}\end{aligned}$$

さらに，$\mathrm{sign}\,(p_1,p_2,3) = \mathrm{sign}\,(p_1,p_2)$ は自明で，$(p_1,p_2,3)$ がすべてを動くとき，(p_1,p_2) もすべてを動き，逆もまたそうであるので

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \sum_{(p_1,p_2)\in S_2} \mathrm{sign}\,(p_1,p_2) a_{p_1 1} a_{p_2 2}.$$

■

注意 3.2 この定理では，与えられた行列式の計算を次数を下げて計算できる点が重要である．

例 3.4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9(5-8) = -27.$$

3.4.2 転置行列の行列式

続いて，行列の転置についての性質を述べる．行列の転置とは次で定義される．一般の (m,n) 行列 $A=(a_{ij})$ について，$B=(b_{ij})$ が A の**転置行列**であるとは B は (n,m) 行列であって，$b_{ij}=a_{ji}$ を満たすときをいう．これを ${}^tA$ と表す．

例 3.5

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

正方行列の場合には，対角成分を軸に対称に入れ替えて作る．

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

一般の場合は，**1列，2列，⋯ が1行，2行，⋯**，そして**1行，2行，⋯ が1列，2列，⋯** に変わる．

転置行列の性質をまとめておこう．

定理 3.2 (1) ${}^t({}^tA) = A$.

(2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.

(3) ${}^t(cA) = c\,{}^tA, \quad c \in \mathbb{R}$.

(4) ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

(5) 正方行列 A が正則ならば ${}^tA$ も正則で

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

証明 (1) から (3) は自明である．(4) を示す $A = (a_{ij})$ は (m, n) 行列，$B = (b_{ij})$ は (n, ℓ) 行列である．AB の (i, j) 成分を $(AB)_{ij}$ と書くと，

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

転置の定義から

$$({}^t(AB))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}.$$

一方，右辺について，

$$({}^tA)_{ij} = a_{ji}, \quad ({}^tB)_{ij} = b_{ji}$$

であるから，

$$({}^tB\,{}^tA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tB)_{ik} ({}^tA)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk}.$$

よって示された．

■

問題 3.4 性質 (5) を検証せよ．

転置行列と行列式の間には次の結果が成立する．

定理 3.3 (転置に関する行列式の不変性) 正方行列 $A = (a_{ij})$ について

$$|{}^tA| = |A|$$

が常に成り立つ．

証明 ${}^tA$ の (i,j) 成分を $({}^tA)_{ij}$ と書く．$({}^tA)_{ij}=a_{ji}$.

$$\begin{aligned}|{}^tA| &= \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3}\mathrm{sign}(p_1,p_2,p_3)({}^tA)_{p_11}({}^tA)_{p_22}({}^tA)_{p_33}\\ &= \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3}\mathrm{sign}(p_1,p_2,p_3)a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\end{aligned}$$

ここで，$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ をかけ算の入れ替えを行って，$a_{q_11}a_{q_22}a_{q_33}$ と表示する．

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}=a_{q_11}a_{q_22}a_{q_33}$$

何回入れ替えを行うかを考えると，順列 (p_1,p_2,p_3) が基本順列 $(1,2,3)$ になる置換の回数と同じ．これを k 回とする．このとき，(q_1,q_2,q_3) も k 回で $(1,2,3)$ になることがわかる．すなわち，

$$\mathrm{sign}(p_1,p_2,p_3)=\mathrm{sign}(q_1,q_2,q_3)$$

(p_1,p_2,p_3) と (q_1,q_2,q_3) はただ一つに対応して，(p_1,p_2,p_3) が S_3 を動くとき，(q_1,q_2,q_3) も S_3 を動くので

$$\sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3}\mathrm{sign}(p_1,p_2,p_3)a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}=\sum_{(q_1,q_2,q_3)\in S_3}\mathrm{sign}(q_1,q_2,q_3)a_{q_11}a_{q_22}a_{q_33}=|A|$$

が従う． ■

この結果から次のことが直ちに従う．

系 3.1

$$\begin{vmatrix} B & * \\ O & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{nn}|B|.$$

問題 3.5 この系の結果を導け．

例 3.6

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2\end{vmatrix}=-15.$$

注意 3.3 (行列式についての列と行の伝播性) 定理 3.3 により，列に関する性質はすべて行についても成立する．

3.4.3　列ベクトル表示

さて，n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ を列ベクトル表示する．

$$A=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\dots,\boldsymbol{a}_n). \quad \textbf{行列の列ベクトル表示}$$

例えば

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

ならば

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

である．列ベクトルを用いて行列式を見ると，

$$|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n|=\sum_{(p_1,\dots,p_n)\in S_n}\mathrm{sign}\,(p_1,\dots,p_n)a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

列番号が左右綺麗に対応する．

命題 3.1 (1)　多重線形性が成り立つ．

$$|\boldsymbol{a}_1,\dots,\lambda\boldsymbol{a}_j+\mu\boldsymbol{b},\dots,\boldsymbol{a}_n|=\lambda|\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_n|+\mu|\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{b},\dots,\boldsymbol{a}_n|.$$

(2)　列の置換を行うと行列式の符号が反転する．

$$|\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_k,\dots,\boldsymbol{a}_n|=-|\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_k,\dots,\boldsymbol{a}_j,\dots,\boldsymbol{a}_n|.$$

証明　(1) $n=3$ の場合を示す．

$$|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_3|=\sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3}\mathrm{sign}\,(p_1,p_2,p_3)\,a_{p_11}(a_{p_22}+b_{p_2})a_{p_33}$$

”$+$” を 2 つに分けると結果を得る．

$\alpha\in\mathbb{R}$ について，$|\boldsymbol{a}_1,\alpha\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3|$ も同様.

(2)

$$|\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2|=\sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3}\mathrm{sign}\,(p_1,p_2,p_3)\,a_{p_11}a_{p_23}a_{p_32}.$$

$a_{p_1 1}a_{p_2 3}a_{p_3 2}$ を並べ替えて

$$a_{p_1 1}a_{p_2 3}a_{p_3 2} = a_{p_1 1}a_{p_3 2}a_{p_2 3}$$

とするとき，(p_1, p_2, p_3) を 1 回置換すると (p_1, p_3, p_2) になるので，

$$\mathrm{sign}\,(p_1, p_2, p_3) = -\mathrm{sign}\,(p_1, p_3, p_2).$$

(p_1, p_2, p_3) が S_3 を動くとき，(p_1, p_3, p_2) も S_3 を動く．よってこの "$-$" が反転を与える．

この命題から導かれる結果を列挙しよう．

注意 3.4 (1) 命題 3.1 (2) から同一の列ベクトルを 2 本もつ行列式は 0 である．

$$|\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n| = 0.$$

(2) これと命題 3.1 (1) より，列に関する掃き出しは行列式の値を変えない：

$$|\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_j + \lambda\boldsymbol{a}_k, \dots, \boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_j, \dots, \boldsymbol{a}_n|.$$

(3) 定理 3.3 から行について同じ命題が成立する．

さて，以上の性質を用いて行列式の計算は実行される．例えば

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -6 \end{vmatrix} \\
= &\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -13 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 13 & 2 & -6 \end{vmatrix} \quad \text{(1,4) 成分を軸とした第 1 行の掃き出し} \\
= &-\begin{vmatrix} 7 & 13 & 2 & -6 \\ -3 & -13 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行と 4 行の交換} \\
= &-\begin{vmatrix} 7 & 13 & 2 \\ -3 & -13 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{命題 3.1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\begin{vmatrix} -45 & 13 & -37 \\ 49 & -13 & 44 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3,2)\text{ 成分を軸とした第 3 行の掃き出し} \\
&= \begin{vmatrix} -45 & -37 & 13 \\ 49 & 44 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{第 2 列と 3 列の交換} \\
&= (-45 \cdot 44 + 37 \cdot 49) = -167.
\end{aligned}
$$

例 3.7 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は 3 次正方行列で $|A| = 3$ である．このとき，次の行列式を計算する．

(1) $|\boldsymbol{a}_3, 5\boldsymbol{a}_2, -\boldsymbol{a}_1|$

(2) $|\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1|$

(3) $|2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, 3\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_1, 4\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2|$

(1), (2) は線形性と列の入れ替えによる．(3) も和の線形性を用いるが，同じ列が 2 つ並ぶと行列式が零になるので，異なる index から成るものだけを choice すればよい．すなわち，$(2,3,1)$ と $(3,1,2)$.

3.4.4　積の行列式

一方で，行列の正則性との関係では次の結果が意味がある．行列の積に関して次の性質が成り立つ．

定理 3.4 n 次正方行列 A, B について，$|AB| = |A||B|$.

注意 3.5 (1) 行列式の記号に $|\cdot|$ を用いるのはこの性質による．

(2) これにより，A が正則ならば行列式 $|A| \neq 0$ が従う．実際，A が正則ならば $AX = E_n$ (単位行列) をみたす X が存在するが，$|AX| = |E_n| = 1$ であり，$|AX| = |A||X|$ であるので，$|A| \neq 0$ が従う．

証明　$n=3$ のときを証明する．

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ &= A(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) \\ &= (A\boldsymbol{b}_1,\ A\boldsymbol{b}_2,\ A\boldsymbol{b}_3). \quad (AB \text{ の列ベクトル表示}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{b}_1 &= A\begin{pmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 \\ b_{21} \\ 0 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_{31} \end{pmatrix} \\ &= b_{11}A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b_{21}A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_{31}A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{21}\boldsymbol{a}_2 + b_{31}\boldsymbol{a}_3, \quad A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3). \end{aligned}$$

同様にして

$$A\boldsymbol{b}_j = b_{1j}\boldsymbol{a}_1 + b_{2j}\boldsymbol{a}_2 + b_{3j}\boldsymbol{a}_3$$

を得るので

$$\begin{aligned} & |AB| \\ = \ & |b_{11}\boldsymbol{a}_1 + b_{21}\boldsymbol{a}_2 + b_{31}\boldsymbol{a}_3,\ b_{12}\boldsymbol{a}_1 + b_{22}\boldsymbol{a}_2 + b_{32}\boldsymbol{a}_3,\ b_{13}\boldsymbol{a}_1 + b_{23}\boldsymbol{a}_2 + b_{33}\boldsymbol{a}_3| \end{aligned}$$

が従う．ここで和に関する線形性を用いるが，同じ列が並ぶと行列式は零になるので，

$$|AB| = \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3} |b_{p_1 1}\boldsymbol{a}_{p_1}, b_{p_2 2}\boldsymbol{a}_{p_2}, b_{p_3 3}\boldsymbol{a}_{p_3}|$$

が従う．再び実数倍に関する線形性を用いて

$$|AB| = \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3} b_{p_1 1} b_{p_2 2} b_{p_3 3} |\boldsymbol{a}_{p_1}, \boldsymbol{a}_{p_2}, \boldsymbol{a}_{p_3}|.$$

ここで $|\boldsymbol{a}_{p_1}, \boldsymbol{a}_{p_2}, \boldsymbol{a}_{p_3}|$ について列の入れ換えを行い，$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|$ にする．k 回で完了したとすると，

$$|\boldsymbol{a}_{p_1}, \boldsymbol{a}_{p_2}, \boldsymbol{a}_{p_3}| = (-1)^k |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3|.$$

一方，このことは，順列 (p_1, p_2, p_3) について

$$(p_1, p_2, p_3) \to\to \cdots \to (1,2,3) \quad (k \text{ 回で})$$

と同値であり，これは

$$\mathrm{sgn}(p_1, p_2, p_3) = (-1)^k$$

を与える．以上から

$$\begin{aligned} |AB| &= \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3} b_{p_1 1} b_{p_2 2} b_{p_3 3}\, \mathrm{sgn}(p_1, p_2, p_3) |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| \\ &= |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3| \sum_{(p_1,p_2,p_3)\in S_3} \mathrm{sgn}(p_1, p_2, p_3) b_{p_1 1} b_{p_2 2} b_{p_3 3} \end{aligned}$$

が従う． ■

問題 3.6 $|A| = 5$, $|B| = 3$ のとき，次の行列式を計算せよ．

(1) $|A^2|$

(2) $|A^{-1}|$

(3) $(AB)^{-1}$

(4) $|B^{-1}AB|$

3.5 余因子展開

3.5.1 定義

ここでは行列式の計算の簡略化と，行列の正則性と行列式の関係を確立するために，行列の余因子という概念を導入する．以下，話は $n = 3$ に限って行うが，それは一般の n 次正方行列の場合にも並行して成り立つ．

3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

について 3 次正方行列 A の $(1,1)$ 成分 a_{11} の**余因子** $\tilde{a}_{11}$ を次で定義する．

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ただし，右辺の行列式は A の $(1,1)$ 成分 a_{11} を含む行と列を除いた小行列の行列式であ

る．同様にして，成分 a_{23} の余因子 $\tilde{a}_{23}$ は次で定義される[5]．

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

問題 3.7 3 次正方行列 A のすべての成分に対して余因子を定義せよ．

注意 3.6 一般の n 次正方行列について同様にして余因子は定義される．

問題 3.8 (1) 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

のすべての成分の余因子を計算せよ．

(2) 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

のすべての成分の余因子を計算せよ．

行列式は余因子を用いて次のように与えられる．

定理 3.5 (余因子展開) 3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について

$$|A| = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31} \quad \text{(第一列の展開)}$$

$$|A| = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} \quad \text{(第一行の展開)}$$

同様にして，すべて列，行で展開可能である（**余因子展開**）．

例 3.8 (余因子展開を用いた計算例)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ = \ & 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{(第 2 列の展開)} \\ = \ & -2(-6-20) = 52. \end{aligned}$$

[5]右辺の行列式は a_{23} を含む行と列を除いた小行列の行列式である．

証明 (余因子展開の証明) 第一列の展開について証明する．残りは全く同様にできる．第一列について線形性を用いて $|A|$ を n 個の行列式の和で表す．

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{n1}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

右辺の行列式はそれぞれ順に $\tilde{a}_{11}, \ldots, \tilde{a}_{n1}$ となる．実際，行と列の交換を繰り返し行い，1 成分を (n,n) 成分の位置に持ってくると，定理の結果を得る．一般に $\tilde{a}_{ij}$ はつぎのように導かれる．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} & 0 & \\ B_{11} & \vdots & B_{12} \\ & 0 & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & 0 & \\ B_{21} & \vdots & B_{22} \\ & 0 & \end{vmatrix} &= (-1)^{n-j}(-1)^{n-i}\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{2n-(i+j)}\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \\ &= \tilde{a}_{ij}\end{aligned}$$

■

問題 3.9 定理の証明を厳密に行え．

3.5.2 余因子行列と正則性

さて，行列の正則性と行列式の関係を完結しよう．余因子展開の結果から従うつぎの系は重要である．

系 3.2 ある列（resp. 行）の成分と別の列（resp. 行）の余因子の積の和は常に零である．例えば

$$0 = a_{12}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{31} \quad (\text{第 2 列の成分と第 1 列の余因子})$$

$$0 = a_{11}\tilde{a}_{31} + a_{12}\tilde{a}_{32} + a_{13}\tilde{a}_{33} \quad \text{(第１行の成分と第３行の余因子)}$$

証明　第一列の展開を書くと

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{31}\tilde{a}_{31}$$

余因子は第１列の成分を使わずに与えられるから，右辺において，第１列の成分 a_{11}, a_{21}, a_{31} の**代わりに**第２列の成分を置くと

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\tilde{a}_{11} + a_{22}\tilde{a}_{21} + a_{32}\tilde{a}_{31}.$$

左辺は行列式には同じ列が第一，第二に並ぶので，これは零である．よって示せた．一般に定理の主張が成り立つ．■

注意 3.7 余因子展開は「**同じ**列の成分と余因子の積の和は $|A|$ である」という主張.

3 次正方行列 $A = (a_{ij})$ について

$${}^{t}\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

を A の**余因子行列**という．$\tilde{A}$ と A の積の計算を行うと余因子展開と系 3.2 の列に関する結果から

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

を得る．$A\tilde{A}$ については行に関する結果を用いると同じ主張を得る．すなわち，

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = |A|E_3.$$

もし $|A| \neq 0$ ならば両辺に $1/|A|$ を掛けることで

$$(\frac{1}{|A|}\tilde{A})A = A(\frac{1}{|A|}\tilde{A}) = E_3$$

を得る．以上からつぎの結果を導くことができた．

定理 3.6 (正方行列の正則性の特徴付け) n 次正方行列 A について，A が正則であるための**必要十分条件**は $|A| \neq 0$ を満たすことである．そして，$|A| \neq 0$ のとき，A の逆行列 A^{-1} は次の公式で与えられる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}, \quad \text{ただし，} \tilde{A} \text{ は } A \text{ の余因子行列}$$

注意 3.8 $n = 2$ の場合，$A = (a_{ij})$ の逆行列を与える公式は

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

であることが知られている．定理の結果はこの結果を含む.

問題 3.10 このことを検証せよ.

3.5.3 クラメルの公式

余因子行列を用いた逆行列の表示を，応用例として挙げる．次の 3 元一次連立方程式を考える：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \end{cases}$$

積の性質を利用して，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$A\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$$

と表示できる．このとき，方程式の解を与える公式を次のように得る：

定理 3.7 A を n 次正方行列とせよ．さらに $|A| \neq 0$ とせよ．このとき A を係数行列と

する連立方程式 $A\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$ の解は次の公式で与えられる．特に $n = 3$ とすると

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \text{（分子の行列式は第一列を } \boldsymbol{b} \text{ に置き換えたもの）}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \text{（分子の行列式は第二列を } \boldsymbol{b} \text{ に置き換えたもの）}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|} \quad \text{（分子の行列式は第一列を } \boldsymbol{b} \text{ に置き換えたもの）}$$

証明　A は正則だから

$$(\mathbf{x} =)A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

ここで

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}, \quad \text{（}\tilde{A} \text{ は } A \text{ の余因子行列）}$$

であるので

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}\boldsymbol{b}$$

が従う．$\tilde{A}\boldsymbol{b}$ を書き下すと

$$\tilde{A}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

となり，第一成分は

$$b_1\tilde{a}_{11} + b_2\tilde{a}_{21} + b_3\tilde{a}_{31}$$

なので 第一列を $\boldsymbol{b}$ に置き換えた $|A|$ の第一列のおける余因子展開である．よって

$$b_1\tilde{a}_{11} + b_2\tilde{a}_{21} + b_3\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が従う．x_2, x_3 についても同様である．

例 3.9 連立方程式

$$\begin{cases} 4x + 8y & = -13 \\ -3x + 11y & = 4 \end{cases}$$

を解く.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -13 & 8 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & 11 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -13 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & 11 \end{vmatrix}}$$

梅津健一郎

前橋工科大学工学部総合デザイン工学科

〒 371-0816 前橋市上佐鳥町４６０－１

E-mail ken@maebashi-it.ac.jp

URL http://umeken.sakura.ne.jp/kenwiki/index.php