１９９７微分積分学II（昼）中間試験問題

平成9年12月12日 (金) 実施

[1] 関数

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}$$

の $(x,\, y) = (0, 0)$ における接平面を求めよ.

[2] 次の合成関数を考える.

$$z = e^{xy}$$
$$x = u + v, \quad y = uv$$

$u,\, v$ の関数である z の u に関する2階偏導関数 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ を求めよ.

[3] 関数

$$f(x, y) = \sin(x + 2y)$$

について $(x,\, y) = (0, 0)$ で 2 次の項までテーラーの定理を用いよ (つまり 2 次までマクローリンの定理を用いよ).

[4] $x,\, y,\, z$ を正の数として, それぞれ縦, 横, 奥行きとした直方体を考える. $(x,\, y,\, z)$ が半径 1 原点を中心とした球面上：$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を動くとき, 体積が最大のものを求めよ.

微分積分学 II (昼) 期末試験問題

1998/2/6(金)

[1] 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_{D_1} x\sqrt{y}\,dxdy, \qquad D_1 = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$$

[2] 積分領域 D_2 を $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ を頂点とする正方形とするとき, 変数変換

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

を行って次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_{D_2} (x+y)^2 e^{x-y}\ dxdy$$

[3] 重積分

$$\iint_{D_3} e^{-x^2-y^2}\ dxdy, \qquad D_3 = \{x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

の値を求めよ. さらにこの結果を用いて

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を示せ.

微分積分学 II 中間試験問題

平成 10 年 11 月 27 日 (金)

[1] 関数

$$f(x,y) = \sin(x-2y)$$

に対して次の問に答えよ。

(1) $(x,y) = (\pi, 2\pi)$ における接平面を求めよ。

(2) f に対してマクローリンの定理（剰余項２次）を適用せよ。

[2] 関数

$$z = f(x,y), \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

のとき、次の式を示せ。

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

[3] 次の関数の極値を求めよ。

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 12y$$

微分積分学 II 期末試験問題

1999 年 2 月 5 日 (金)

[1] 積分領域 $V = \{(x, y, z) : x + 2y + z \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$ について、3 重積分

$$\iiint_V x\, dxdydz$$

を求めよ。

[2] 累次積分

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{-y^2}\, dy \right) dx$$

について次の問に答えよ。

(1) 積分領域を図示せよ。

(2) 積分値を求めよ。

[3] 積分領域 $V = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1,\ x^2 + y^2 \leqq \frac{1}{4}\right\}$ における 3 重積分

$$\iiint_V dxdydz$$

を求めよ。

微分積分学 II 中間試験問題　1999.12.10(金)

[1] 関数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について次の問に答えよ。

(1) 偏微分係数 $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ を求めよ。

(2) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で全微分可能で**ない**ことを示せ。ただし、$(0,0)$ で全微分可能であるとは

$$g(h,k)=f(h,k)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k-f(0,0)$$

と置いたときに

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

を満たすことをいう。

(3) $f(x,y)$ の $(0,0)$ での連続性について論じよ（連続である、連続でない、etc）。

[2]

$$z=e^x\cos y,\quad x=t^3,\quad y=\sqrt{1-t}$$

のとき、

$$\frac{dz}{dt}(-2)$$

を求めよ。

[3]

$$f(x,y)=(x^2+1)e^{-y}$$

の 3 次の Maclaurin の定理を求めよ。

[4]

$$f(x,y)=x^3+3xy-y^3$$

の極値を求めよ。

微分積分学 II 期末試験問題　2000.2.18(金)

[1] 重積分

$$\iint_D x^2 y \, dxdy$$

を求めよ。ただし, D は図 1 の斜線部とする。

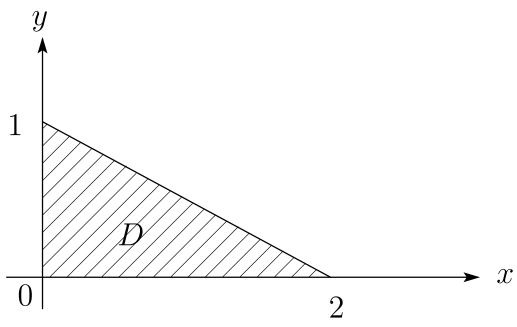


図 1

[2] 累次積分

$$\int_0^1 \left(\int_{2x-1}^{\sqrt{x}} f(x,y) \, dy \right) dx$$

の順序を交換せよ。

[3] 重積分

$$\iint_D (y-2x)^2 \, e^{-(y+x)} \, dxdy$$

を求めよ。ただし, D は図 2 の斜線部で与えられる。

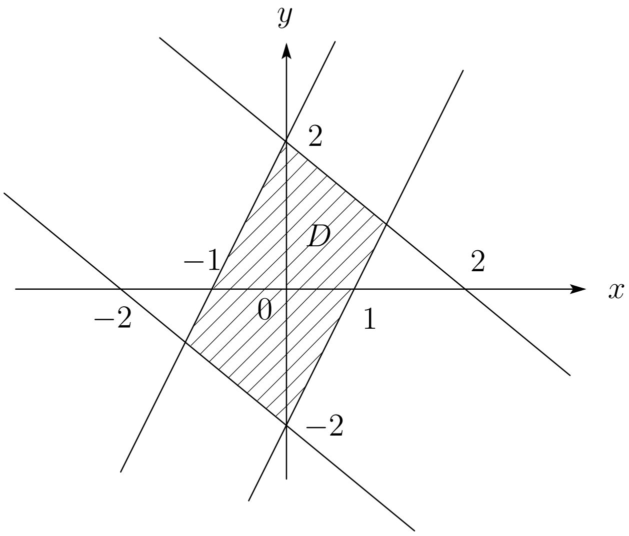


図 2

[4] 円柱 $x^2+y^2 \leqq 1$ の 平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1$ と xy 平面 $(z=0)$ で囲まれた部分の体積を求めよ。

２０００微分積分学 II 中間試験問題

2000 年 12 月 1 日 (金) 実施

(注意)
(i) 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．
(ii) 解答例については試験終了後，`http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm` を参照のこと．

1. (配点 5 点)　関数
$$f(x,y) = e^{y-3x}\cos(x-2y)$$
の $(x,y)=(0,0)$ における接平面の方程式を求めることで
$$(x,y) = (10^{-3}, \frac{10^{-3}}{2})$$
における $f(x,y)$ の近似値を計算せよ．

2. (配点 5 点)　次の極限値を求めよ．存在しないならば「存在しない」と答えよ．
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

3. (配点 10 点)
$$f(x,y) = y^4\log(1-x),$$
$$\begin{cases} x = u^2+v \\ y = uv^3 \end{cases}$$
から決まる合成関数の二次偏導関数 f_{uv} の $(u,v)=(1,-1)$ における値を求めよ．

4. (配点 10 点)　関数
$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2$$
の極値を求めよ．

２０００微分積分学 II 中間試験問題・解答例

2000 年 12 月 1 日 (金) 実施

1. 接平面の方程式は

$$S(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y$$

である．

$$f_x = -3e^{y-3x}\cos(x-2y) - e^{y-3x}\sin(x-2y)$$

$$f_y = e^{y-3x}\cos(x-2y) + 2e^{y-3x}\sin(x-2y)$$

であるので，$f_x(0,0) = -3,\ f_y(0,0) = 1.\ f(0,0) = 1$ より

$$S(x,y) = 1 - 3x + y.$$

これより，近似値

$$S(10^{-3}, \frac{10^{-3}}{2}) = 1 - \frac{5}{2}10^{-3} = 0.9975$$

を得る．

2. $x = 0$ として y 軸に沿って $(x,y) \to (0,0)$ とすると

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{0}{y^4} = 0.$$

一方，$x = y^2$ に沿って $(x,y) \to (0,0)$ とすると

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}.$$

よって極限値は存在しない．

3.　合成関数の微分法から

$$\begin{aligned} f_u &= f_x x_u + f_y y_u \\ &= \frac{-y^4}{1-x}2u + 4y^3\log(1-x)\cdot v^3. \end{aligned}$$

$$g(x,y) = \frac{-y^4}{1-x}$$

$$h(x,y) = 4y^3\log(1-x)$$

とおくとき

$$\begin{aligned} f_{uv} &= g_v 2u + h_v v^3 + h\cdot 3v^2 \\ &= (g_x x_v + g_y y_v)2u + (h_x x_v + h_y y_v)v^3 + h\cdot 3v^2 \\ &= (\frac{-y^4}{(1-x)^2} + \frac{-4y^3}{1-x}3uv^2)2u + (\frac{-4y^3}{1-x} + 12y^2\log(1-x)\cdot 3uv^2)v^3 + 4y^3\log(1-x)\cdot v^3 \end{aligned}$$

$(u,v) = (1,-1)$ のとき $(x,y) = (0,-1)$. したがって $f_{uv} = 18$.

4.

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0$$

$$f_y = -3x + 2y = 0$$

を解くと，$(x, y) = (0, 0)$, $(3/2, 9/4)$ を得る．

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = -3,\ f_{yy} = 2$$

であるので，判別式 D を計算すると

$$D(0, 0) = 9 > 0$$

だから $(0, 0)$ は極値点ではない．一方，

$$D(3/2, 9/4) = -9 < 0$$

であり，$f_{xx}(3/2, 9/4) = 9 > 0$ なので $f(3/2, 9/4) = 27/16$ は極小値である．

２０００微分積分学 II 昼 期末試験問題

2001 年 2 月 2 日 (金) 実施

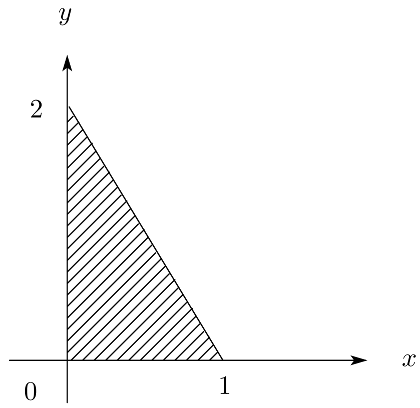
1.　次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D e^{-x}\cos y \, dxdy, \qquad D = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\}$$

2.　次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D (xy + x + y)\, dxdy$$

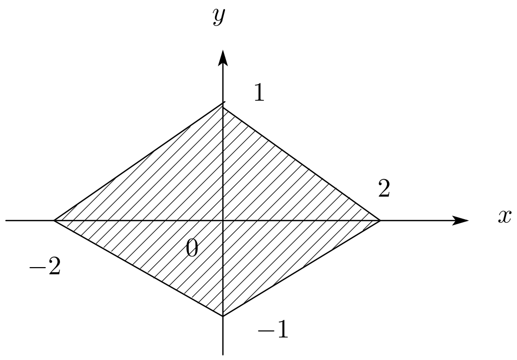
ただし D は下図の斜線部．



3.　次の重積分を計算せよ．

$$\iint_D (\frac{x}{2} - y)\ \log(\frac{x}{2} + y + 2)\ \ dxdy$$

ただし D は下図の斜線部．



4.　次の不等式で与えられる立体の体積を求めよ．

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4 \\ x^2 + (y-1)^2 \leqq 1 \end{cases}$$

２０００微分積分学 II 昼 期末試験問題・解答例

2001 年 2 月 2 日 (金) 実施

1.
$$1 - e^{-1}$$

2.
$$\frac{7}{6}$$

3.
$$0$$

4.
$$\frac{16\pi}{3} - \frac{64}{9}$$

[1] ２変数関数のグラフの接平面について考える．

(1) 関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における接平面の方程式 $S(x)$ を書け．

(2)

$$f(x,y)=\cos\frac{y}{x}$$

の点 $(x,y)=(2,\pi)$ における接平面の方程式を求めよ．

[2] テイラーの定理について考える．

(1) C^2-級の関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における２次のテイラーの定理を書け．

(2) 関数

$$f(x,y)=e^{-y}\log(1+3x)$$

の $(x,y)=(1,1)$ における２次のテイラーの定理を求めよ．

[3] 合成関数の偏微分を考える．

$$f(x,y)=(2x-y)^7+x^3y^5$$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

を合成して $z=f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)$ を作る．このとき，θ についての偏微分

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

を計算して，$(r,\theta)=(1,\pi)$ における値

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}(1,\pi)$$

を求めよ．

[4] 次の関数の極値をすべて求めよ．

$$f(x,y)=x^4-4xy+y^2$$

[1] (1)

$$S(x) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b).$$

(2)

$$f_x(x,y) = \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}, \quad f_y(x,y) = -\frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}.$$

よって $f_x(2,\pi) = \frac{\pi}{4}$, $f_y(2,\pi) = -\frac{1}{2}$, $f(2,\pi) = 0$ だから

$$S(x) = \frac{\pi}{4}(x-2) - \frac{1}{2}(y-\pi) = \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2}y.$$

[2] (1)

$$\begin{aligned} & f(a+h, b+k) \\ = \; & f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\ & + \frac{1}{2}(f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k)h^2 + 2f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k)hk + f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)k^2), \quad 0<\theta<1. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & f(1,1) = \frac{\log 4}{e}, \\ & f_x(x,y) = e^{-y}\frac{3}{1+3x}, \quad f_x(1,1) = \frac{3}{4e}, \\ & f_y(x,y) = -e^{-y}\log(1+3x), \quad f_y(1,1) = -\frac{\log 4}{e}, \\ & f_{xx}(x,y) = -e^{-y}\frac{9}{(1+3x)^2}, \\ & f_{xy}(x,y) = -e^{-y}\frac{3}{1+3x}, \\ & f_{yy}(x,y) = e^{-y}\log(1+3x). \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & e^{-(1+h)}\log(1+3(1+k)) \\ = \; & \frac{\log 4}{e} + \frac{3}{4e}h - \frac{\log 4}{e}k \\ & + \frac{1}{2}\left(-e^{-(1+\theta k)}\frac{9}{(1+3(1+\theta h))^2})h^2 - 2e^{-(1+\theta k)}\frac{3}{1+3(1+\theta h)}hk \right. \\ & \quad \left. + e^{-(1+\theta k)}\log(1+3(1+\theta h))k^2\right), \quad 0<\theta<1. \end{aligned}$$

[3]

$$f_x = 14(2x-y)^6 + 3x^2y^5 \quad f_y = -7(2x-y)^6 + 5x^3y^4.$$

$$x_\theta = -r\sin\theta, \quad y_\theta = r\cos\theta.$$

よって

$$z_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta = -\{14(2x-y)^6 + 3x^2y^5\}r\sin\theta + \{-7(2x-y)^6 + 5x^3y^4\}r\cos\theta.$$

$r=1$, $\theta=\pi$ のとき，$x=-1$, $y=0$. よって

$$z_\theta(1,\pi) = 448.$$

[4] 停留点を求める．

$$f_x = 4x^3 - 4y = 0, \quad f_y = -4x + 2y = 0.$$

第二式の $y = 2x$ を第一式に代入．$4x^3 - 8x = 0$. ゆえに $x = 0, \pm\sqrt{2}$. 停留点は

$$(x, y) = (0, 0),\ (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}).$$

続いて

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = -4, \quad f_{yy} = 2.$$

$$\therefore\ \mathit{\Delta} = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 16 - 24x^2.$$

$$\mathit{\Delta}(0, 0) = 16 > 0.$$

よって $f(0, 0)$ は極値ではない．

$$\mathit{\Delta}(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = -32 < 0, \quad f_{xx}(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 24 > 0$$

だから $f(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = -4$ は極小値.

$$\mathit{\Delta}(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = -32 < 0, \quad f_{xx}(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = 24 > 0$$

だから $f(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = -4$ は極小値.

[**1**] つぎの重積分を計算せよ．

$$\iint_D xy^2 dxdy, \quad D = \{(x,y) |\ y \leqq x+2,\ y \geqq 0,\ x \leqq 0\}$$

[**2**] (1) つぎの領域 D を図示せよ．

$$D = \{(x,y) |\ y \geqq x^2,\ y \leqq 2x+3\}$$

(2) D 上の重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ を y, x の順の累次積分で表示せよ．

(3) 逆に，x, y の順の累次積分で表示せよ．

[**3**] つぎの重積分を計算せよ．ただし，変数変換の公式を用いる場合には，ヤコビヤンを求める計算過程を記述せよ．

(1) $$\iint_D y\, dxdy, \quad D = \{(x,y) |\ x^2+y^2 \leqq 9,\ y \geqq 0\}$$

(2) $$\iiint_D z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) |\ x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ x \leqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\}$$

[**1**] $-8/15$

[**2**] (1) 略 (2)

$$\int_{-1}^{3}(\int_{x^2}^{2x+3} f(x,y)dy)dx$$

(3)

$$\int_0^1(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx)dy + \int_1^9(\int_{\frac{y-3}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx)dy$$

[**3**] (1) 18 (2) $\pi/20$

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は零点とする．

[1] 次の関数の極値をすべて求めよ．

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$$

[2] 関数

$$z = \sqrt{1 - 3x^2 - y^2}$$

の定義域の点

$$(a,b) = (\frac{1}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}})$$

における方向

$$(-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}})$$

についての方向微分係数を求めよ．

[3] 次の関数の 2 次導関数をすべて求めよ．

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

[4] 関数 $f(x,y)$ と $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の合成関数

$$z(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

を考える．f が

$$f(x,y) = (4x - y)^{18}$$

のとき，z の偏微分係数

$$\frac{\partial z}{\partial r}(1, -\pi), \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}(-2, \frac{\pi}{2})$$

を求めよ．ただし，指数の計算が生じる場合にはこれを行わなくて良い ($2^{10}, 5^8$ 等).

[5] 次の関数の点 $(a,b) = (-1,1)$ における接平面の方程式 $S(x,y)$ を求めよ．

$$f(x,y) = e^{-2y}\log(1 - 3x)$$

[**解答例**] [1] $f_x=2x-3y=0,\ f_y=-3x+3y^2=0$ から

$$(x,y)=(0,0),\ (\frac{9}{4},\frac{3}{2}).$$

この 2 つが停留点である．

$f_{xx}=2,\ f_{xy}=-3,\ f_{yy}=6y$ より

$$\Delta(x,y)=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=9-12y.$$

$\Delta(0,0)=9>0$. よって $(0,0)$ は極値点ではない．

$\Delta(\frac{9}{4},\frac{3}{2})=-9<0$ かつ $f_{xx}>0$ だから $(\frac{9}{4},\frac{3}{2})$ は極小点である．極小値は

$$f(\frac{9}{4},\frac{3}{2})=-\frac{27}{16}.$$

[2]

$$z_x=\frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2-y^2}},\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{1-3x^2-y^2}}.$$

$$z_x(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})=-3,\quad z_y(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})=1.$$

よって

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}(-3)+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}1=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

が求める方向微分係数である．

[3]

$$f_{xx}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}-\frac{4y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$f_{yy}=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^3}$$

[4]

$$z_r=f_xx_r+f_yy_r=18(4x-y)^{17}4\cos\theta+18(4x-y)^{17}(-1)\sin\theta$$

$$z_\theta=f_xx_\theta+f_yy_\theta=18(4x-y)^{17}4(-r\sin\theta)+18(4x-y)^{17}(-1)r\cos\theta$$

$(r,\theta)=(1,-\pi)$ のとき，$x=-1,\ y=0$. ゆえに $z_r(1,-\pi)=3^22^{37}$. 一方，$(r,\theta)=(-2,\frac{\pi}{2})$ のとき，$x=0$, $y=-2$. ゆえに $z_\theta(-2,\frac{\pi}{2})=3^22^{21}$.

[5]

$$f_x=e^{-2y}\frac{-3}{1-3x},\quad f_y=-2e^{-2y}\log(1-3x).$$

ゆえに $f_x(-1,1)=\frac{-3}{4e^2}$, $f_y(-1,1)=\frac{-4\log 2}{e^2}$. また $f(-1,1)=\frac{2\log 2}{e^2}$ であるので

$$S(x,y)=-\frac{3}{4e^2}(x+1)-\frac{4\log 2}{e^2}(y-1)+\frac{2\log 2}{e^2}.$$

[**1**] つぎの重積分を計算せよ.

$$\iint_D y(1-x)\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|\ 2x+y\leqq 2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$$

[**2**] 領域

$$D=\{(x,y)|x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq 1,\ y\leqq x\}$$

について重積分 $\iint_D f(x,y)dxdy$ を

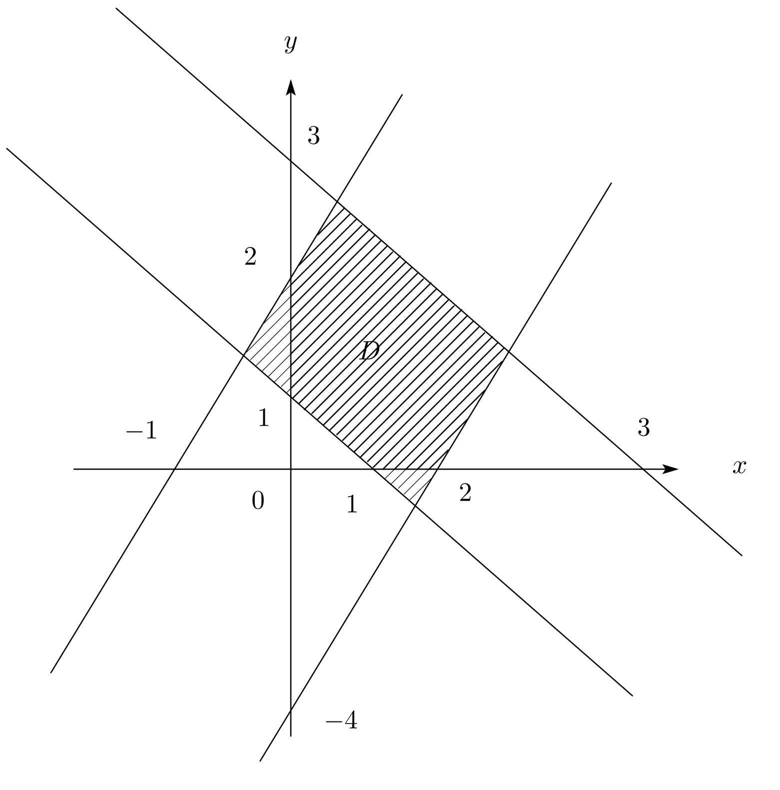
(1) x,y の順に累次積分せよ.

(2) y,x の順に累次積分せよ.

[**3**] 図に示された領域 D の面積

$$\iint_D dxdy$$

を計算せよ.



[**4**] 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D y\,dxdy, \quad D=\{(x,y)|y\geqq 0,\ 1\leqq x^2+y^2\leqq 4\}$$

[**5**] 次の３重積分を計算せよ.

$$\iiint_V (1-x-y)\,dxdydz, \qquad V=\{(x,y,z)|x\geqq 0, y\geqq 0, z\geqq 0,\ x+y+z\leqq 1\}$$

[解答例]

[1] 1/2

[2] (1)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{1/\sqrt{2}} (\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx)dy$$

(2)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{1/\sqrt{2}} (\int_0^x f(x,y)dy)dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 (\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy)dx$$

[3] 4

[4] 14/3

[5] 1/12

(注意) **解答は結果だけでなく，それに至る過程も記述せよ．結果のみの場合は零点になる．**

[**1**] 関数 $z = e^x \log(1+xy)$ の $(x,y) = (2,1)$ における接平面を求めよ.

[**2**] 関数 $z = x^2 - 3xy + y^3$ の極値をすべて求めよ.

[**3**] 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{e^x} f(x,y)\,dy \right) dx$ の積分の順序を交換せよ.

[**4**] 2 重積分 $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy,\quad D = \{(x,y) : x \geqq 0,\, y \geqq 0,\, 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4\}$ を求めよ.

K.U.

[解答例]

[1] 接平面の方程式は $g(x,y) = z_x(2,1)(x-2) + z_y(2,1)(y-1) + z(2,1)$ であるから，実際に $z_x(2,1)$, $z_y(2,1)$, $z(2,1)$ を計算すると，

$$g(x,y) = e^2(\frac{1}{3} + \log 3)(x-2) + \frac{2e^2}{3}(y-1) + e^2 \log 3.$$

[2] 停留点を求めると，$z_x = 2x - 3y = 0$, $z_y = -3x + 3y^2 = 0$ より $(x,y) = (0,0), (9/4, 3/2)$. 続いて，$\Delta = z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy} = 9 - 12y$ だから，$(0,0)$ ならば $y = 0$, よって $\Delta = 9 > 0$. $(0,0)$ は極値点ではない．一方，$(9/4, 3/2)$ ならば $y = 3/2$, よって $\Delta = -9 < 0$. さらに $z_{xx} = 2 > 0$ より $(9/4, 3/2)$ は極小点である．極小値 $z(9/4, 3/2) = -27/16$.

[3]

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy + \int_1^e \left(\int_{\log y}^1 f(x,y)dx \right) dy$$

[4] $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により，変数変換．ヤコビ行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$ だから

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \iint_{D'} r^3 \cos\theta \sin\theta drd\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 \frac{r^3}{2} \sin 2\theta \, dr \right) d\theta \\ &= \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

K.U.

(注意) 解答は結果だけでなく，それに至る過程も記述せよ．結果のみの場合は零点になる．

1. $f(x,y) = e^{-x}\sin y$ の $(x,y) = (0, \frac{\pi}{2})$ における接平面の方程式を求めよ．
2. $f(x,y) = x^3 - 4xy + y^2$ の極値をすべて求めよ．
3. 次の累次積分を 積分順序を交換して 計算せよ．

$$\int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} x^2\,dx\right) dy$$

K.U.

解答

1.　接平面の方程式

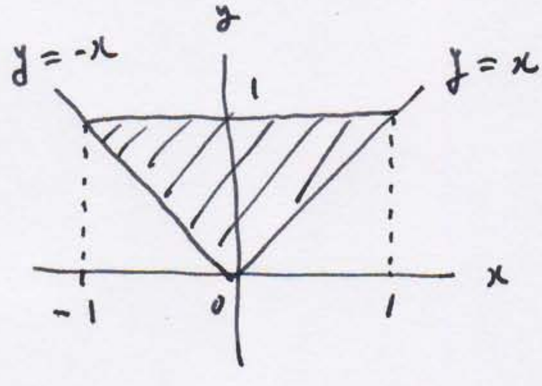
$$g(x,y) = f_x\left(0,\frac{\pi}{2}\right)(x-0) + f_y\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\left(y-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -x+1$$

2.　$f_x = f_y = 0$ をとくと停留点 $(0,0)$, $\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right)$ を得る. 実際には, $(0,0)$ は極値点ではない. $\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3}\right)$ は極小点で 極小値は $-\frac{256}{27}$

3.



$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{-x}^{1} x^2\,dy\right)dx + \int_{0}^{1}\left(\int_{x}^{1} x^2\,dy\right)dx$$

$$= \frac{1}{6}.$$