微分積分学I(昼) 前期期末試験問題

平成9年9月17日(水)実施

[1] 閉区間 $[0,1]$ で連続で、開区間 $(0,1)$ で微分可能でない点をもつ関数の例をつくれ。また、理由も述べよ。

[2]

$$g(x) = e^{\sin x}$$

に対して、$a = \frac{\pi}{2}$ において 剰余項が 3 次になるまでテーラーの定理を適用せよ。

[3]

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}\,dx$$

を計算せよ。ただし、$a > 0$ のとき

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (C : \text{積分定数})$$

を必要があれば用いよ。

[4] 次の問に答えよ。

(1)

$$\lim_{x \to +0} x \log x$$

を求めよ。

(2)

$$\int_0^1 \log x\,dx$$

を計算せよ。

微分積分学 I 中間試験問題

1998/6/17(水)

[1] 加法定理

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

を適当に用いて

$$\cos^2\frac{\pi}{12}$$

を求めよ。

[2] 関数

$$f(x) = e^x \log(1+2x)$$

の微分係数 $f'(0)$ を求めよ。

[3] 関数

$$f(x) = \sin x$$

に対して 4 次のマクローリンの定理を適用せよ。

[4] つぎの極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x}$$

微分積分学 I 期末試験問題

平成 10 年 9 月 16 日 (水)

[1] 次の不定積分を求めよ。

(1)
$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

(2)
$$\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3+1}\,dx$$

(3)
$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

[2] 次の定積分を求めよ。

(1)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

(2)
$$\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$$

[3] 次の広義積分を計算せよ。

(1)
$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x}\,dx$$

(2)
$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

微分積分学 I 期末試験問題　1999.7.28

問. 次の不定積分, 定積分, 広義積分について, ４問選択して答えよ.

(1) $$\int x^3 \log x \, dx$$

(2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} \, dx$$

(3) $$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+7} \, dx$$

(4) $$\int \tan^{-1} x \, dx$$

(5) $$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} \, dx$$

(6) $$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

(7) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \quad (\text{ただし}, n \text{ は奇数})$$

(8) $$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

(9) $$\int \frac{1}{x(\log x)^2} \, dx$$

(10) $$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} \, dx$$

(11) $$\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} \, dx$$

(12) $$\int \frac{1}{x^3+1} \, dx$$

(13) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} \, dx$$

(14) $$\int \frac{\cos^4 x \sin^3 x}{1+\sin x} \, dx$$

微分積分学 I 中間試験問題　2000.6.14(水)

[1] 次の方程式をみたす x を求めよ．

$$\sin^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{4}$$

[2] 逆三角関数 $y = \cos^{-1} x$ の定義を述べよ．ただし，次の単語をすべて含めて述べること．定義域，値域，制限，減少関数.

[3] 導関数

$$(x^3)' = 3x^2$$

を導関数の定義に従って導け.

[4] 次の関数を微分せよ．

$$\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

[5] マクローリンの定理を用いて

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - \cos x}{x}$$

の値を求めよ.

[6] 関数 $y = \sqrt{1+x}$ の 3 次のマクローリンの定理を求めることで，$\sqrt{1.001}$ の近似値に対する誤差の範囲を求めよ.

微分積分学 I 中間試験問題・解答例　2000.6.14(水)

[1]

$$x = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

[2] 三角関数 $y = \cos x$ の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると減少関数になるので値域 $-1 \leqq y \leqq 1$ を定義域とする逆関数が存在する．この逆関数を $x = \cos^{-1} y$ と定める．

[3]

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

[4]

$$\frac{1}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

[5] $f(x) = e^{-x} - \cos x$ とおき２次のマクローリンを適用．$f(0) = 0$. $f'(x) = -e^{-x} + \sin x$. $f'(0) = -1$. $f''(x) = e^{-x} + \cos x$. $f''(c) = e^{-c} + \cos c$.

$$f(x) = -x + \frac{e^{-c} + \cos c}{2} x^2, \quad c \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間.}$$

ゆえに

$$\frac{e^{-x} - \cos x}{x} = -1 + \frac{e^{-c} + \cos c}{2} x.$$

$x \to 0$ のとき $c \to 0$. よって

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} = -1.$$

[6] $f(x) = \sqrt{1+x}$ に３次のマクローリンを適用すると

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}}, \quad 0 < c < x.$$

$x = 10^{-3}$ として誤差を測ると

$$\frac{x^3}{16(1+c)^{5/2}} < \frac{10^{-9}}{16}.$$

微分積分学 I 昼 期末試験問題　2000.8.2(水)

注意

- 答案用紙には学籍番号，名前を書き，表裏両面を使うこと．
- 答案用紙には答えのみでなく，それに至る過程も記述すること．
- 試験終了後，解答は `http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm` に公表する．

[1] 関数

$$f(x) = 8x^3 - \frac{2}{x} + 3\sqrt[3]{x}$$

の原始関数 $F(x)$ の中で $F(1) = 1$ をみたすものを求めよ．

[2] 不定積分

$$\int \log(x^2 + x + 2)\, dx$$

を求めよ．

[3] 次の値を求めよ．

(1)
$$\int_0^1 \frac{5x}{\sqrt[4]{1 - x^2}}\, dx$$

(2)
$$\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$$

微分積分学 I 昼 期末試験問題・解答　2000.8.2.(水)

[1]

$$F(x) = 2x^4 - 2\log|x| + \frac{9}{4}x^{4/3} - \frac{13}{4}$$

[2] 部分積分により

$$\int \log(x^2+x+2)dx = x\log(x^2+x+2) - \int x\frac{2x+1}{x^2+x+2}dx.$$

$$I(x) = x\frac{2x+1}{x^2+x+2}$$

とおくと

$$I(x) = 2 - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{7}{2}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}.$$

したがって，与式は

$$\begin{aligned} & x\log(x^2+x+2) - \int I(x)dx \\ = \ & x\log(x^2+x+2) - 2x + \frac{1}{2}\log(x^2+x+2) + \frac{7}{2}\frac{2}{\sqrt{7}}\tan^{-1}(\frac{2}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{2})) \end{aligned}$$

よって

$$-2x + (x+\frac{1}{2})\log(x^2+x+2) + \sqrt{7}\tan^{-1}(\frac{2x+1}{\sqrt{7}})$$

[3] (1)　$0 < \varepsilon < 1$ として，置換積分により $t = 1 - x^2$ とおくと

$$\int_0^\varepsilon \frac{5x}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx = \frac{5}{2}\int_{1-\varepsilon^2}^1 t^{-1/4}dt = \frac{5}{2}\{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}(1-\varepsilon^2)^{3/4}\}.$$

よって

$$\int_0^1 \frac{5x}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx = \lim_{\varepsilon\to 1+0}\int_0^\varepsilon \frac{5x}{\sqrt[4]{1-x^2}}dx = \frac{10}{3}.$$

(2)　$b > 0$ として，部分積分を２回用いると

$$\int_0^b x^2e^{-x}dx = -b^2e^{-b} - 2be^{-b} - 2e^{-b} + 2.$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^n}{e^b} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

であるから

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^2e^{-x}dx = 2.$$

[1] 次の関数を微分せよ.

(1) $e^x \sin x$

(2) $\dfrac{\log x}{x}$

(3) $\sqrt{1+\sqrt{x}}$

(4) $\cos(\tan(x \sin x))$

(5) $x^{\sin^{-1} x}$

[2] 逆関数の微分法を用いて次の等式を導け.

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

[3] 関数

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

について次の問に答えよ.

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(3) 二次導関数 $f''(x)$ を求めよ.

(4) f のグラフの概形を書け．ただし，増減，極値，凹凸，変曲点を明記せよ.

次の２問のうち１問を選択して答えよ.

[4] 関数

$$f(x) = \log(1-3x)$$

について次の問に答えよ.

(1) $(x, y) = (0, 0)$ で f のグラフに接する接線の方程式を求めよ.

(2) f の３次のマクローリンの定理を求めよ.

[5] 次の問に答えよ.

(1) すべての $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$e^x > \frac{x^n}{n!} \qquad (x > 0)$$

であることを示せ.

(2) 極限値

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{20}}$$

を求めよ.

[1] (1) $e^x \sin x + e^x \cos x$

(2) $\dfrac{1-\log x}{x^2}$

(3) $\dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

(4) $-\dfrac{(\sin x + x\cos x)\sin(\tan(x\sin x))}{\cos^2(x\sin x)}$

[2] $y=\tan^{-1}x$ とおく．y は $-\pi/2<y<\pi/2$ を満たす．逆関数であることから $x=\tan y$．よって逆関数の微分法から

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y.$$

恒等式 $1+\tan^2 y = 1/\cos^2 y$ から

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

[3] (1)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1/x)+x}=0.$$

同様にして

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

(2)

$$f'(x)=\frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}.$$

(3)

$$f''(x)=\frac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(1+x^2)^3}.$$

(4) (1) から (3) の結果を使って作図する．

[4] (1)

$$f'(x)=\frac{-3}{1-3x}$$

より $f'(0)=-3$. よって接線の方程式は

$$y=-3(x-0)+0=-3x.$$

(2)

$$f''(x)=-9(1-3x)^{-2},\quad f'''(x)=-54(1-3x)^{-3}$$

であるので

$$f(x)=0-3x+\frac{-9}{2!}x^2+\frac{-54(1-3c)^{-3}}{3!}x^3=-3x-\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{(1-3c)^3}x^3$$

をみたす c が 0 と x の間に存在する．

[5] (1) $(n+1)$ 次のマクローリンの定理を用いると

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

$x > 0$ のとき右辺の各項はすべて正であるので

$$e^x > \frac{x^n}{n!}.$$

(2) (1) において $n = 21$ とおくと

$$e^x > \frac{x^{21}}{21!}.$$

よって

$$\frac{e^x}{x^{20}} > \frac{x}{21!}.$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{21!} = \infty$ より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^{20}} = \infty.$$

[1] 次の関数の不定積分を計算せよ.

(1)
$$x\sin(1-2x^2)$$

(2)
$$x\ \log x$$

[2] 次の定積分を計算せよ.

(1)
$$\int_1^2 \frac{2x}{(3-x)^3}\,dx$$

(2)
$$\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx$$

[3] 関数
$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2(x^2+2)}$$
について以下の各問いに答えよ.

(1) $f(x)$ を次の形に部分分数分解せよ.
$$f(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

(2) (1) の結果を利用して $f(x)$ の不定積分を計算せよ.

[4] 次の広義積分を計算せよ.

(1)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

(2)
$$\int_2^\infty \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$$

[1] (1)

$$\frac{1}{4}\cos(1-2x^2)+C$$

(2)

$$\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$$

[2] (1) $5/4$ (2) $-5e^{-1}+2$

[3]

(1)

$$f(x)=\frac{2/9}{x+1}+\frac{1/3}{(x+1)^2}+\frac{(-2/9)x-(1/9)}{x^2+2}$$

(2)

$$\frac{1}{9}\{\log\frac{(x+1)^2}{x^2+2}-\frac{3}{x+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{2}})\}+C$$

[4] (1) 2 (2) $\log 4$

[1] 次の各問に答えよ．

(1) $\dfrac{3x+1}{1-2x^2}$ の導関数を求めよ．

(2) $\sqrt{x}\log(1+4x)$ の導関数を求めよ．

[2] 次の６問から**２問以上選択**して答えよ．

(1) $f(x)=x^{\sin x}$ の微分係数 $f'(\dfrac{\pi}{2})$ を求めよ．

(2) $\tan^{-1}\left(\log|\cos(1-x^2)|\right)$ の導関数を求めよ．

(3) 三角関数の微分法は既知であるとして，次の逆三角関数の微分公式を導け．

$$(\cos^{-1}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1<x<1$$

(4) ライプニッツの公式を用いて，$f(x)=x^2e^x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を求めよ．

(5) $f(x)=x^3-2x^2+x+1$ の極値をすべて求めよ．さらに，$x=0$ におけるグラフの増減，凸性を調べよ．

(6) 極限値 を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$$

[3] 関数

$$f(x)=e^{-x}\cos 2x$$

について次の問に答えよ．

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}$ における f の接線の方程式を求めよ．

(2) $x=\pi$ における f の２次近似多項式を求めよ．

(3) f の３次のマクローリンの定理を導け．

[1]

(1)

$$\frac{6x^2+4x+3}{(1-2x^2)^2}$$

(2)

$$\frac{\log(1+4x)}{2\sqrt{x}}+\frac{4\sqrt{x}}{1+4x}$$

[2]

(1) 対数微分法により

$$f'(x)=x^{\sin x}\{(\cos x)(\log x)+\frac{\sin x}{x}\}$$

ゆえに $f'(\pi/2)=1$.

(2) 合成関数の微分法により

$$\frac{2x\tan(1-x^2)}{1+(\log|\cos(1-x^2)|)^2}.$$

(3) $y=\cos^{-1}x$ とおく．$x=\cos y$ かつ $0<y<\pi$. 逆関数の微分法により，

$$\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{\sin y}.$$

$\sin y=\pm\sqrt{1-\cos^2 y}$ であるが，$0<y<\pi$ から $\sin y>0$. ゆえに $\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$.

(4) $e^x\{x^2+2nx+n(n-1)\}$.

(5) 極大値 $31/27$ $(x=1/3)$, 極小値 1 $(x=1)$. $x=0$ のとき，増加状態にあり，上に凸.

(6) ロピタルの定理から $\log 3-\log 2$.

[3]

(1)

$$y=e^{-\pi/2}(x-\frac{\pi}{2})-e^{-\pi/2}$$

(2)

$$y=e^{-\pi}-e^{-\pi}(x-\pi)-\frac{3e^{-\pi}}{2}(x-\pi)^2$$

(3)

$$f(x)=1-x-\frac{3}{2}x^2+\frac{e^{-c}(11\cos 2c+2\sin 2c)}{6}x^3$$

ただし，c は 0 と x の間の実数.

[1] $f(x) = x^4$ の原始関数 $F(x)$ は $F(1) = 4$ をみたす．$F(x)$ を求めよ．

[2] 次の不定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int x^2 \log x \, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x}} \, dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x-1} \, dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{-5x-1}{(x^2+1)(x-5)} \, dx$

[3] 次の定積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 x e^{-x^2} \, dx$

[4] 次の広義積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^7} \, dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{5+x^2} \, dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx$

[1] $F(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{19}{5}$

[2]

(1) $\displaystyle\int x^2 \log x \, dx = \frac{x^3}{3} \log x - \frac{1}{9} x^3 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x}} \, dx = \frac{2}{7}(1-x)^{7/2} - \frac{6}{5}(1-x)^{5/2} + 2(1-x)^{3/2} - 2(1-x)^{1/2} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x-1} \, dx = \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}} \right| + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{-5x-1}{(x^2+1)(x-5)} \, dx = \log \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-5|} + C$

[3] 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} + \frac{7}{6}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = 1$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx = \frac{1+\sqrt{3}}{6}$

(4) $\displaystyle\int_0^2 x e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-4})$

[4] 次の広義積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^7} \, dx = \frac{1}{6}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \, dx = 2$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{5+x^2} \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x} \, dx = 2$

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は零点とする．

[**1**] (1) $f(x) = \dfrac{x\sin^{-1}x}{\cos 4x}$ を微分せよ．

(2) $f(x) = x^{\cos(x^{-2})}$ $(x > 0)$ を微分せよ．

(3) $f(x) = x^2 e^{3x}$ の n 次導関数を求めよ．

[**2**] 関数

$$f(x) = \log|\sin x|, \qquad a = \frac{\pi}{3}$$

に３次のテイラーの定理を適用せよ．

[**3**] 逆関数の微分法に従って

$$(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

を導け．

[**4**] 関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で連続で $f(0) > 0$ とする．さらに次の２条件をみたす：

(D.1) $f'(t) < 0 \quad (t \geqq 0)$

(D.2) $f''(t) \leqq 0 \quad (t \geqq 0)$

(1) $f(t_0) = 0$ となる $t_0 > 0$ が存在することを示せ．

(2) 条件 (D.2) を仮定しないとき，(1) と同じ結論が得られるか否かを理由を述べて記せ．

<u>次の２問のうち**１問を選択**して答えよ．</u>

[**5a**] 関数 $f(x) = (x^2 - 2)e^x$ の極値をすべて求めよ．

[**5b**] $(1+2x)^{\frac{3}{2}} > 1 + 3x$ $(x > 0)$ を導け．

[**解答例**] [1] (1)

$$\frac{(\sin^{-1}x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})\cos 4x+4x\sin^{-1}x\sin 4x}{\cos^2 4x}$$

(2)

$$x^{\cos(x^{-2})}\{2x^{-3}\sin(x^{-2})\log x+\frac{\cos(x^{-2})}{x}\}$$

(3) ライプニッツの公式を直接適用.

$$f^{(n)}(x)=3^n x^2 e^{3x}+2n3^{n-1}xe^{3x}+n(n-1)3^{n-2}e^{3x}$$

[2]

$$f(x)=\log\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2+\frac{\cos c}{3\sin^3 c}(x-\frac{\pi}{3})^3,$$

ただし，c は x と $\frac{\pi}{3}$ の間.

[3] $y=\tan^{-1}x$ ならば $x=\tan y$. ただし $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}.$$

[4] (1) f の 2 次のマクローリンの定理から

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{f''(c)}{2}t^2,$$

$0<c<t$. これから (D.2) を用いると

$$f(t)\le f(0)+f'(0)t.$$

さらに (D.1) から $f'(0)<0$ であるので

$$f(0)+f'(0)t\to-\infty,\quad t\to\infty.$$

はさみうちの原理から

$$f(t)\to-\infty,\quad t\to\infty.$$

つまり $f(t_1)<0$ なる $t_1>0$ が存在する．$f(0)>0$, f が連続であることから，中間値の定理を用いると $f(t_0)=0$ なる $0<t_0<t_1$ が存在する.

(2) 否．理由：反例を挙げる.

$$f(t)=\frac{1}{1+t}$$

は $f(0)>0$, (D.1) をみたすが，(D.2) をみたさない．そして，$t>0$ で t 軸と交わらない.

[5a] $f'(x)=(x^2+2x-2)e^x$ より $f'(x)=0$ を求めると $x^2+2x-2=0$. ゆえに $x=-1\pm\sqrt{3}$.

$f''(x)=(x^2+4x)e^x$. 代入すると

$$f''(-1+\sqrt{3})>0$$
$$f''(-1-\sqrt{3})<0$$

よって $f(-1+\sqrt{3})$ は極小値，$f(-1-\sqrt{3})$ は極大値（正しくは代入した値を求める）.

[5b] $f'(x)=3(1+2x)^{1/2}$. $f''(x)=3(1+2x)^{-1/2}$. $c>0$ に対して $f''(c)>0$ が成り立つので 2 次のマクローリンから $f(x)>1+3x$ が従う.

解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は零点とする．

[**1**] 次の関数の不定積分を求めよ.

(a) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x}}$

(b) $\tan^{-1} x$

(c) $x^2 e^{-x}$

(d) $x^2 e^{-x^3}$

(e) $\dfrac{x^3}{x^2-2x-6}$

(f) $\dfrac{1}{\cos x}$

[**2**] 次の定積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{6}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^{e^2} \log x\,dx$

[**3**] $f(x)$ は $f(-x)=f(x)$ をみたす．置換積分法を用いて

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \qquad (a>0)$$

を導け.

[**4**] 次の広義積分を求めよ.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

[**解答例**] [1] 積分定数は略す.

(a) $-2(1-x)^{1/2}+(4/3)(1-x)^{3/2}-(2/5)(1-x)^{5/2}$

(b) $x\tan^{-1}x-(1/2)\log(1+x^2)$

(c) $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}$

(d) $-(1/3)e^{-x^3}$

(e) $(x^2/2)+2x+5\log|x^2-2x-6|+(11/\sqrt{7})\log|(x-1-\sqrt{7})/(x-1+\sqrt{7})|$

(f) $-\log|(-1+\tan(x/2))/(1+\tan(x/2))|$

[2] (a) 3 (置換積分)

(b) $(1/2)\log 2$ (置換積分)

(c) e^2+1 (部分積分)

[3] $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx$. 第一項を $x=-t$ で置換積分すると $\int_{a}^{0}f(-t)(-dt)=\int_{0}^{a}f(-t)dt=\int_{0}^{a}f(t)dt$. 最後の等号で $f(-t)=f(t)$ を用いた.

[4] (a) 5/4

(b) π

(c) $+\infty$ (発散)

- 何題解いても良い.
- 解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること.
- [A] **から１題以上かつ** [B] **から１題以上正答** の場合，合格とする．この条件に達しない場合は不合格とする．部分点は考慮しない.

[A] 積分の問題

[**1**] 次の関数の不定積分を求めよ.

$x\tan^{-1}x$

ただし，$\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ における逆関数.

[**2**] 次の定積分を計算せよ.

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x\log x}dx$$

[**3**] 次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(\frac{\pi}{3} - 3x)\,dx$$

[**4**] 次の関数の不定積分を求めよ.

$$\frac{x^4}{x^2 - 2x + 4}$$

[**5**] 次の広義積分を求めよ.

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x}\,dx$$

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}} = 0$ を用いて良い.

[B] 微分の問題

[**6**] 関数 $f(x) = (x^2 - 2)e^x$ の極値，増減，凹凸を調べ，グラフをかけ.

[**7**] 次の関数を微分せよ.

$x^{\sin x}$ $(x > 0)$

[**8**] $f(x) = \cos x$ にマクローリンの定理を適用して

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (0 < x < \pi)$$

を示せ.

[**9**] 次の関数を微分せよ.

$\sin^{-1}(\tan\sqrt{x})$

ただし，$\sin^{-1}t$ は $\sin t$ の $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ における逆関数を表す.

[**10**] 次の関数の二次導関数（２回微分）を求めよ.

$e^{-x}\log(1 - 3x)$

(注意) **解答は結果だけでなく，それに至る過程も記述せよ．結果のみの場合は零点になる．**

[**1**] 関数 $f(x) = [x]$ について以下の問に答えよ．ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数である．

(a) f の不連続点をすべて求めよ．

(b) 次の右極限値，左極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 3+0} f(x), \quad \lim_{x \to -5-0} f(x)$$

(c) 微分係数 $f'(1/2)$ を求めよ．

[**2**] 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (ネイピア数) は既知として，次の微分公式を定義から導け．

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

[**3**] 次の関数を微分せよ．

(1) $\log|\sin x|$

(2) $(3x+1)^{1/x}$

(3) $\tan^{-1}(\sqrt{x})$

[**4**] 関数 $e^{-x}\cos 3x$ の３階までの導関数をすべて求めよ．

[**5**] 関数 $f(x) = \cos x$ について以下の問に答えよ．

(a) f の５次のマクローリンの定理を書け．

(b) (a) の結果，剰余項を調べることによって次の不等式を導け．

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad (0 < x < \pi)$$

K.U.

[解答例] [1] (a) $x = 0, \pm 1, \pm 2. \cdots$ (整数全体)

(b)

$$\lim_{x \to 3+0} f(x) = 3, \qquad \lim_{x \to -5-0} f(x) = -6$$

(c) $f'(1/2) = 0$

[2] 差分 $\frac{\log(x+h) - \log x}{h}$ を考えて，対数法則により

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}.$$

$h/x = 1/k$ とおく．$h \to +0$ のとき，$k \to +\infty$. $h \to -0$ のとき，$k \to -\infty$. このとき仮定より

$$\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k/x} = \frac{1}{x}\log\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} \longrightarrow \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x}.$$

[3] (1) $1/\tan x$

(2) $(3x+1)^{1/x}\{\frac{-\log(3x+1)}{x^2} + \frac{3}{x(3x+1)}\}$

(3) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

[4] $f'(x) = -e^{-x}(\cos 3x + 3\sin 3x)$

$f''(x) = e^{-x}(-8\cos 3x + 6\sin 3x)$

$f'''(x) = e^{-x}(26\cos 3x + 18\sin 3x)$

[5] (a) $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{\sin c}{120}x^5$. ただし，$c$ は 0 と x の間.

(b) $0 < c < \pi$ であるから，$\sin c > 0$. よって剰余項は常に負．ゆえに与えられた不等式が成り立つ.

K.U.

(注意) **解答は解答用紙に記入し，結果だけでなくそれに至る過程も記述せよ．結果のみの場合は零点になる．**

[**1**] 関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ とは何か，述べよ．

[**2**] 次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int (\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}})\,dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int \sin^{-1} x\,dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2-2}{x^2+x-2}\,dx$

[**3**] 次の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 4x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\,dx$

K.U.

[解答例] [1] $F'(x) = f(x)$ をみたす関数.

[2] (1) $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3\sqrt[3]{x^2} + C$ (2) $\log|\log x| + C$ (3) $x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C$ (4) $\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x^2 + x - 2| - \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$

[3] (1) $\tan^{-1}e - \frac{\pi}{4}$ (2) $-1/8$ (3) 4

K.U.

(注意)

- 試験時間は 60 分とする．
- 解答は解答用紙に記入し，結果だけでなくそれに至る過程も記述せよ．結果のみの場合は零点になる．

1. 次の関数を微分せよ．$\sqrt{x}\log|\tan^{-1}x|$

2. マクローリンの定理から次の不等式を導け．$x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x\ (0<x<\pi)$

3. 次の不定積分を求めよ．$\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2-4x+3}\,dx$

4. 次の定積分を求めよ．$\displaystyle\int_0^1\sin^{-1}x\,dx$

K.U.

(注意)

- 解答用紙には**学籍番号，氏名を忘れずにかくこと**
- 解答は結果だけでなく，それに至る**過程を記述すること**．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いて $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ を求めよ．ただし，$\sin^{-1}x$ は $\sin x$ $(-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$ の逆関数である．

2. 関数 $\dfrac{\cos 2x}{x^2+1}$ の導関数を求めよ．

3. $(e^x)'=e^x$ を $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ から導け．

4. $f(x)=x^2e^{-x}$ の極値をすべて求めよ．

5. $f(x)=\log(1+2x)$ の 3 次のマクローリンの定理を求めよ．

6. 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-4x}}\,dx$ を求めよ．

7. 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x}{x^3-5x^2+9x-5}\,dx$ を求めよ．

8. 定積分 $\displaystyle\int_1^e\sqrt{x}\log x\,dx$ を求めよ．

K.U.

[解答例]

1. $y = \sin^{-1} x$ とおくと $x = \sin y$. $x \to 0$ のとき $y \to 0$. よって

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

2. 商の微分公式から

$$\left(\frac{\cos 2x}{x^2+1}\right)' = -\frac{2\sin 2x}{x^2+1} - \frac{2x}{(x^2+1)^2}\cos 2x.$$

3. $y = e^x$ とおくと $x = \log y$. 逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1/y} = y = e^x.$$

4. $f'(x) = x(2-x)e^{-x} = 0$ とおくと $x = 0, 2$. $f''(x) = (x^2-4x+2)e^{-x}$ で $f''(0) = 2 > 0$ より $f(0) = 0$ は極小値．一方，$f''(2) = -2e^{-2} < 0$ より $f(2) = 4e^{-2}$ は極大値.

5.

$$\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3(1+2c)^3}x^3,$$

ただし，c は 0 と x の間.

6. $1-4x = t$ として置換積分を行うと

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x}}\,dx = -\frac{1}{8}\sqrt{1-4x} + \frac{1}{24}(1-4x)^{3/2} + C.$$

これは部分積分でも解ける.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x}}\,dx = x\left(\frac{-1}{2}(1-4x)^{1/2}\right) - \int (x)'\frac{-1}{2}(1-4x)^{1/2}\,dx$$

として計算.

7.

$$\int \frac{x}{x^3-5x^2+9x-5}\,dx = \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x^2-4x+5| + \frac{3}{2}\tan^{-1}(x-2) + C.$$

8. 部分積分により

$$\int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx = \frac{2}{9}e^{3/2} + \frac{4}{9}.$$

K.U.