微分積分学I(夜) 前期期末試験問題

平成9年9月19日(金)実施

[1] 次の関数のグラフを書け。

$$y = \cos x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

[2] 微分せよ。

(1)
$$f(x) = e^x \ \sin 2x$$

(2)
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

[3] ロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

を求めよ。

[4] (1) 関数 $f(x)$ に対して $x = a$ においてテーラーの定理を3次まで書け。
(2) 次の関数に対して、$a = 1$ で 3 次までテーラーの定理を適用せよ。

$$2x^3 + x - 2$$

[5] 次の不定積分を求めよ。

(1)
$$\int \left(x^2 - 2x + 3\right) \, dx$$

(2)
$$\int \cos(3x+5) \, dx$$

(3)
$$\int \frac{1}{x^3 + x^2} \, dx$$

[6] 講義で定積分における部分積分の公式：

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$$

を学んだ(覚えていますか？)。これを用いて次の値を求めよ。

(1)
$$\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

(2)
$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx$$

微分積分学 I 中間試験問題

1998/6/19(金)

[1] つぎの関数を微分せよ。

(1) $$x^2 + x^{-\frac{1}{2}}$$

(2) $$\frac{\log x}{x}$$

(3) $$e^x \sin(2x+1)$$

[2] つぎの値を求めよ。

(1) $$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) $$\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

[3] 関数

$$f(x) = \cos x$$

に対して 4 次のマクローリンの定理を適用せよ。

[4] つぎの極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$$

微分積分学 I 期末試験問題

平成 10 年 9 月 18 日 (金)

[1] 次の不定積分を求めよ。

(1) $$\int \left(x^2 - \frac{3}{x^3} \right) \, dx$$

(2) $$\int \sqrt{1-4x} \, dx$$

(3) $$\int x e^x \, dx$$

(4) $$\int \frac{1}{x^2 - 6x + 8} \, dx$$

[2] 次の定積分を求めよ。

(1) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) \, dx$$

(2) $$\int_1^e x \log x \, dx$$

[3] 次の広義積分を計算せよ。

(1) $$\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}} \, dx$$

(2) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^4} \, dx$$

微分積分学 I 期末試験問題　1999/7/30(金)

[1] 次の不定積分, 定積分の中で, **3問**を選択して答えよ.

(1) $$\int x^2 \sin x \, dx$$

(2) $$\int_1^2 (5x-6)^4 \, dx$$

(3) $$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$$

(4) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx$$

(5) $$\int (3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{4x}) \, dx$$

(6) $$\int_0^1 xe^{-x} \, dx$$

(7) $$\int \frac{1}{x^2-4x-10} \, dx$$

(8) $$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{\pi}{2} - 3x) \, dx$$

(9) $$\int x \log(1-x) \, dx$$

[2] 次の中で, **1問**を選択して答えよ.

(1) $$\int \frac{4x^2}{3x^2+6x+7} \, dx$$

(2) $$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

微分積分学 I 中間試験問題 2000.6.30(金)

[1] 次の式を計算せよ．

$$\left\{\frac{(4^2\cdot\sqrt{3})^4\cdot 8^2}{9}\right\}^{\frac{1}{8}}$$

[2] $\log 2 = a,\ \log 3 = b$ で表すとき

$$\log\frac{72}{e}$$

を a, b で表せ．ただし，e はネイピア数を表す．

[3] 次の値を求めよ．

(1) $$\tan\frac{5\pi}{6}$$

(2) $$\sin\frac{\pi}{12}$$

(3) $$\cos\frac{5\pi}{12}$$

[4] 次の関数の導関数を求めよ．

(1) $$2x^4 - 3x^{-2} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$$

(2) $$e^{-x}\log(1+3x)$$

(3) $$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

[5] 逆関数の微分法を用いて

$$(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

を求めよ．

[6] 対数微分法を用いて

$$x^{\log x} \qquad (x>0)$$

の導関数を求めよ．

[7] 次の関数の**いずれか一方を選択**してグラフを描け．ただし，増減，凹凸，極値を明示せよ．

(1) $$f(x) = 3x^3 - 4x + 2$$

(2) $$f(x) = (x-1)e^x \qquad (x \geq 0)$$

[8]

$$f(x) = \cos x$$

の $a = \pi$ における 3 次のテーラーの定理を求めよ．

微分積分学 I 中間試験問題・解答例　2000.6.30(金)

[1]

$$\frac{8}{\sqrt[4]{2}}$$

[2]

$$3a+2b-1$$

[3] (1)　$-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(2)　半角の公式を用いる．$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

$\sin\frac{\pi}{12} > 0$ より

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

さらに 2 重根号をはずして

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

と答えるとなお良い.

(3)　$\cos x$ の加法定理を用いる.

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

[4] (1)　$8x^3+6x^{-3}-\frac{1}{6}x^{-4/3}$.

(2)　積の公式を使う.

$$e^{-x}\left(\frac{3}{1+3x} - \log(1+3x)\right).$$

(3)　商の公式を使う.

$$\frac{2(1-x^2)\cos 2x + x\sin 2x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

[5] $y=\tan^{-1}x$ とおく．$x=\tan y$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

ゆえに

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

だから

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

[6]

$$y = x^{\log x}$$

とおく．両辺 log をとると

$$\log y = \log x^{\log x} = (\log x)^2.$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = 2(\log x)\frac{1}{x}.$$

したがって

$$y' = \frac{2x^{\log x}\log x}{x}.$$

[7] 略

[8] $f(\pi) = -1$. $f'(x) = -\sin x$. $f'(\pi) = 0$. $f''(x) = -\cos x$. $f''(\pi) = 1$. $f'''(x) = \sin x$. $f'''(c) = \sin c$.

$$\cos x = -1 + \frac{1}{2}(x-\pi)^2 + \frac{\sin c}{6}(x-\pi)^3.$$

ただし，c は π と x の間.

微分積分学 I 夜 期末試験問題　2000.8.4.(水)

注意

- 答案用紙には学籍番号，名前を書き，表裏両面を使うこと．
- 答案用紙には答えのみでなく，それに至る過程も記述すること．
- 試験終了後，解答は `http://inside.maebashi-it.ac.jp/~ken/2000test.htm` に公表する．

[1] 不定積分

$$\int \frac{x}{(2x-1)^3}\,dx$$

を $2x-1=t$ で置換することにより計算せよ．

[2] 次の不定積分を計算せよ．

$$\int \frac{1}{x(1-4x)}\,dx$$

[3] 次の不定積分求めよ．

$$\int x\sin x\,dx$$

[4] 次の不定積分を求めよ．

$$\int \tan^{-1} x\,dx$$

[5] 次の定積分を求めよ．

$$\int_1^2 xe^{x^2}\,dx$$

[6] 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^3 \log(1+6x)\,dx$$

[7] 次の広義積分を計算せよ．

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$$

微分積分学 I 夜 期末試験問題・解答　2000.8.4.(水)

[1]

$$-\frac{1}{4(2x-1)}-\frac{1}{8(2x-1)^2}$$

[2]

$$\log|x|-\log|1-4x|$$

[3]

$$-x\cos x+\sin x$$

[4]

$$x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

[5]

$$\frac{1}{2}(e^4-e)$$

[6]

$$-3+\frac{19}{6}\log 19$$

[7]

$$\frac{1}{3}$$