解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] a, b は次の条件をすべてみたす．a, b を求めよ：(1) 生成される部分空間の次元について，

$$\dim V(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ a \end{pmatrix}) = 2$$

(2) ２つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

のなす角 は $\dfrac{\pi}{3}$ で，かつ $\mathbf{x}$ の大きさは $|\mathbf{x}| = 1$.

[2] 次の行列について，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) 固有値，固有空間を求めよ．

(b) それぞれの固有空間の基底を正規直交基底に取り直せ．

(c) A を対角化せよ．

[3] 伝染病のモデルを考える．それぞれ，

健康な状態 : α

病気の状態 : β

死亡 : γ

とする．翌月に掛けて，健康な人の $\dfrac{1}{2}$ が発病して，病気の人の $\dfrac{1}{3}$ が健康に回復して $\dfrac{1}{3}$ が死に至る．このような比率で毎月 α, β, γ の人口は推移しているとする．α, β, γ の初期条件（ある月の人口）をそれぞれ，x_0, y_0, z_0 とする．

(a) 一ヶ月後の α, β, γ のそれぞれの人口を x_1, y_1, z_1 とするとき，写像

$$f\colon \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

の表現行列 A を求めよ．

(b) f は全射であるか．

(c) $x_0 = 100$, $y_0 = z_0 = 0$ とする．n ヶ月後の α, β, γ のそれぞれの人口 x_n, y_n, z_n を求めよ．さらに，定常状態 $(n \to \infty)$ では全員死に至ることを導け．

[4] 方程式

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1$$

をみたす曲線 (x, y) は <u>楕円</u>，<u>双曲線</u> のどちらか．標準形を求めよ．

[解答例] [1]　誠に申し訳ないことですが，[1] は問題が不適であることがわかりました．このような a, b は存在しません．出題者としてお詫びします．全員に [1] の配点分 (25 点) を加算します．

[2]　(a) 固有方程式 $(\lambda+1)^2(\lambda-2)=0$. ゆえに $\lambda=-1,2$ (固有値)．固有空間を求める．-1 について，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V_{-1} \quad \Longrightarrow \quad x+y+z=0.$$

よって $y=t, z=s$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

つまり

$$V_{-1} = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

同様にして，2 について，

$$V_2 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(b) V_{-1} について，シュミットより，

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき，直交化する．

$$\mathbf{b}_1' = (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})(1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1/2)\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{b}_2' = (1/|\mathbf{b}_2|)\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

以上から

$$V_{-1} = V(\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}) \quad \text{正規直交基底}$$

V_2 については正規化して

$$V_2 = V(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}) \quad \text{正規直交基底}$$

(c) $\dim V_{-1} + \dim V_2 = 3$ より対角化可能．(a) より

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{対角行列}$$

[3] (a)

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) 基本変形により

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 2$ だから全射ではない．

(c) まず

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

であることに注意．A^n が求まれば良い．<u>A^n を求めるために A を対角化する</u>．A の固有方程式 $(1/6)\lambda(\lambda-1)(6\lambda-5) = 0$. ゆえに $\lambda = 0, 5/6, 1$ (固有値)．よって A は対角化可能．それぞれの固有空間を求める．

$$V_0 = V(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$V_{5/6} = V(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

P として

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{対角行列}$$

P^{-1} を基本変形により与える：

$$(P\,E_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to\to\cdots\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (E_3\,P^{-1})$$

以上を用いて

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5/6)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5/6)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 & 0 \\ -3/5 & -2/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3/5)(5/6)^n & (2/5)(5/6)^n & 0 \\ (3/5)(5/6)^n & (2/5)(5/6)^n & 0 \\ 1-(6/5)(5/6)^n & 1-(4/5)(5/6)^n & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

初期値から

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3/5)(5/6)^n & (2/5)(5/6)^n & 0 \\ (3/5)(5/6)^n & (2/5)(5/6)^n & 0 \\ 1-(6/5)(5/6)^n & 1-(4/5)(5/6)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60(5/6)^n \\ 60(5/6)^n \\ 100-120(5/6)^n \end{pmatrix}.$$

$n \to \infty$ のとき，$(5/6)^n \to 0$ だから

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって全員死亡する．

[4]

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = (x\ y) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{対称行列}$$

A を直交行列 U で対角化する．固有値 $2, 4$. 共に正であるから <u>楕円である</u>．標準形を求める．それぞれの固有空間：

$$V_2 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad V_4 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

それぞれの基底を正規化して

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とおくと U は直交行列であり，

$${}^tUAU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = U \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tU.$$

代入,

$$1 = 3x^2 - 2xy + 3y^2 = (x\ y)\, U \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tU \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tU \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{新座標}$$

とおくと

$$(x\ y)\, U \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tU \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (X\ Y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 2X^2 + 4Y^2.$$

最終的に

$$\frac{X^2}{(1/\sqrt{2})^2} + \frac{Y^2}{(1/2)^2} = 1 \quad \text{楕円}$$

を得る.

KU