解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．

[1] 次のベクトル列は一次独立であるか，一次従属であるか，判定せよ．

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

[2] a は実数とする．生成される部分空間について，

$$\dim V(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}) = 2$$

であるとき，a を求めよ．

[3] 線形写像 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ は次で与えられる：

「f は $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ を $\frac{\pi}{3}$-回転させ，続けて，y 軸に関して対称に写す」

(a) f の表現行列を求めよ．ただし，θ-回転を表す行列は証明無しで与えてよい．

(b) f は単射であるか．

[4] 二つのベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} b \\ -4 \end{pmatrix}$$

は直交している．b を求めよ．さらに，求めた b について，$\mathbf{y}$ を正規化せよ．

[5] 生成される部分空間

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix})$$

の正規直交基底を求めよ．

[6] 行列

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

は対角化可能であるか．可能ならば正則行列 P を与えて，$P^{-1}AP$ が対角行列となるようにせよ．

[7] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

について，

(a) 固有値，固有空間を求めよ．

(b) 勝手に $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ を与えて，$A\mathbf{x}$ を作図せよ．

(c) A^n を求めよ．ただし，$n = 1, 2, 3, \cdots$

[解答例] [1] 一次独立．実際，基本変形により

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が導ける．

[2] $a = 8$

[3] (a) 線形写像の合成は表現行列の積で表せる．

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) 基本変形により

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \to\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに単射.

[4] (a) 直交条件 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ (内積が 0) から $b = -3$.

(b)

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

を正規化すると

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

[5] 例えば

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおいて，シュミットの直交化法を用いると

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{54}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は V_1 の正規直交基底.

[6] 固有方程式は $(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$. よって固有値は ± 1. 1 の固有空間は

$$V_1 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$$

-1 の固有空間は

$$V_{-1} = V(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

これより，$\dim V_1 + V_{-1} = 3$ であるので対角化可能．P として

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{対角行列}$$

[7] (a) 固有値は $2, 5$. それぞれの固有空間は

$$V_2 = V(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}), \quad V_5 = V(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$$

(b) 作図可能．作図は略．

(c) P として

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は正則で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{対角行列}$$

ゆえに

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

実際

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2/3)2^n + (1/3)5^n & (1/3)2^n - (1/3)5^n \\ (2/3)2^n - (2/3)5^n & (1/3)2^n + (2/3)5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

KU