**解答は結果だけでなく，それに至る過程を記述すること．結果のみの解答の場合，その問の得点は 0 点とする．**

[**1**] ３次正方行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $x$ は実数とする，について

(1) $x = 2$ のとき，基本変形による方法で逆行列を求めよ．

(2) $x = -3$ のとき，余因子行列を構成する方法で逆行列を求めよ．

[**2**] $a, b$ は実数である．連立方程式 $\begin{cases} 2x + y &= 0 \\ x + ay &= 0 \\ by + z &= 0 \end{cases}$ が，$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外に解を無数にもつための $a, b$ の条件を求め，そのときの解を表示せよ．

[**3**] 行列式 $\begin{vmatrix} 50 & -60 & 50 & -100 \\ -60 & -60 & 50 & -100 \\ 50 & 50 & 50 & -100 \\ -100 & -100 & -100 & -100 \end{vmatrix}$ の値は $a \times 10^m$ $(1 \leqq a < 10;\ m = 0, 1, 2, \cdots)$ である．$a, m$ を求めよ．

[**4**] $A$ は $n$ 次正方行列で，$E_n$ は $n$ 次の単位行列である．このとき，$XA = E_n$ ならば $AX = E_n$ であることを示せ．

*K.U.*

[解答例] [1](1) $\begin{pmatrix} -7 & 8 & -3 \\ 9 & -10 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\dfrac{-1}{14}\begin{pmatrix} -7 & -7 & 7 \\ 9 & 5 & -11 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

[2] 拡大係数行列を作り,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ 行と }2\text{ 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,1)\text{ 成分の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(2,2)$ 成分で軸が出来るか否かで場合分け.

(i) $\underline{1-2a \neq 0 \text{ のとき}}$. $\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となって，ただ一つ.

(ii) $\underline{1-2a = 0 \text{ のとき}}$，すなわち $a = 1/2$ のとき.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行と }3\text{ 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$b$ について場合分け.

(ii-I) $\underline{b \neq 0 \text{ のとき}}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 行を }1/b\text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a/b & 0 \\ 0 & 1 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2b & 0 \\ 0 & 1 & 1/b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{標準形.}$$

一方,

(ii-II) $\underline{b = 0 \text{ のとき}}$. $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{ 列と }3\text{ 列の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 標準形を得る.

以上をまとめると，$a = 1/2$ のときは $b$ の値によらず解を無数にもつ．よって求める条件は $\underline{a = 1/2}$.

解の表示については，$\underline{a = 1/2 \text{ かつ } b \neq 0 \text{ のとき}}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1/(2b) \\ -1/b \\ 1 \end{pmatrix}$. 一方,

$\underline{a = 1/2 \text{ かつ } b = 0 \text{ のとき}}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. いずれも $t$ は実数.

[3] 列，行のスカラー倍の性質から

$$\begin{vmatrix} 50 & -60 & 50 & -100 \\ -60 & -60 & 50 & -100 \\ 50 & 50 & 50 & -100 \\ -100 & -100 & -100 & -100 \end{vmatrix} \overset{\text{1 から 4 列について}}{=} 100\cdot 50\cdot 10\cdot 10 \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 & -1 \\ -6 & -6 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 1 & -1 \\ -10 & -10 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{4 列に 3 列を加える}}{=} 5\cdot 10^5 \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & -6 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ -10 & -10 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{4 列で余因子展開}}{=} -15\cdot 10^5 \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -6 & -6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行に 2 行の } (-1) \text{ 倍を足す}}{=} -15\cdot 10^5 \begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{1 行で余因子展開}}{=} -15\cdot 11\cdot 10^5 \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1.815\cdot 10^8$$

[4] $|XA| = |E_n| = 1$, $|XA| = |X||A|$ より，$|X| \neq 0$. $X$ は正則であり，$X^{-1}$ をもつ．よって $XA = E_n$ ならば $AX = E_nAX = (X^{-1}X)AX = X^{-1}(XA)X = X^{-1}E_nX = E_n$.

*KU*

**追**：問題 [2] について，学生の中にきれいな解答がありました．紹介します．
係数行列について，

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行と 1 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2,1)\text{ 成分の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行と 3 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1-2a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 列と 3 列の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1-2a \end{pmatrix}.$$

対角成分に 1 が 2 つ並ぶので，解が無数に出るには $1-2a=0$ でなければならない．このとき $b$ は何でもよい．$a = 1/2$ として方程式を解くと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -b \end{pmatrix}$.（実際，解答例の解の形とこの解の形は一致します．こちらの方が良い！）良く考えていると思います．